

## Глава 4

### ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И СООТНОШЕНИЯ ФОТОМЕТРИИ

Слово "фотометрия" составлено из двух греческих слов: "фос" (φως) – свет и "метрео" (μετρεω) – измеряю, т.е. в переводе на русский язык, его следует понимать как "световые измерения". В бытовом понимании "свет" – это ощущение, которое возникает у человека под влиянием падающего в его глаз электромагнитного излучения с длинами волн, лежащими в пределах от 380нм до 780нм. В технике под словом "свет" понимают то излучение, которое вызывает зрительное ощущение. Измерение этого излучения и составляет задачу фотометрии.

Первой фотометрической работой в истории науки было разделение звёзд по их блеску (по освещённости от этих звёзд) на шесть классов – звёздных величин, выполненное Гиппархом во II веке до Р.Х. В звёздном каталоге Птолемея, приложенном к его "Альмагесту", содержатся оценки звёздных величин свыше 1000 звёзд. Сопоставляя их с современными объективными измерениями освещённости от этих же звёзд, установили, что когда одна звезда имеет звёздную величину на единицу больше, чем другая, то освещённость от первой в 2,5 раза меньше, чем от второй. Постепенное расширение общего интереса к измерениям света можно проследить по литературным памятникам и отметить его у Данте (XIII в.), у Леонардо да Винчи (XV в.) и у Галилея (XVII в.).

Начало практического применения некоторых видов световых измерений можно, по-видимому, отнести к концу XVI и началу XVII веков и особенно к XVIII веку, когда были опубликованы книги основоположников фотометрии французского учёного Пьера Бугера (1698–1758) (Bouguer P. Essai d'optique sur la gradation de la lumiere. – Paris, 1729) и немецкого учёного Иоганна Генриха Ламберта (1728–1777) (Lambert J.H. Photometria, sive de mensura et gradibus luminis, colorum et umbrae – Augsberg, 1760). С тех пор методы световых

измерений непрерывно совершенствуются, следуя за ускоряющимся темпом технического прогресса, предъявляющего всё более высокие требования к различным видам измерений лучистой энергии.

С древнейших времён и до XIX века единственная возможность замечать и оценивать излучение была связана со зрением человека. Естественно поэтому, что все фотометрические законы и соотношения развивались только в связи с воздействием излучения на глаз наблюдателя и что световые измерения могли осуществляться только в пределах видимого спектра. С появлением приёмников, чувствительных к ультрафиолетовым и инфракрасным лучам, содержание фотометрии стало расширяться и в настоящее время её можно определить как совокупность методов и теории, охватывающих энергетику процессов излучения, распространения и превращения (в частности, поглощения) лучистой энергии в любой части электромагнитного спектра. Однако, чаще всего фотометрические соотношения применяются к ультрафиолетовому, видимому и инфракрасному излучениям, объединяемым в общем понятии оптического излучения.

#### **4.1. Интенсивность излучения некогерентного источника конечных размеров в геометрическом приближении**

Плотность потока энергии электромагнитного поля определяется вектором Умова-Пойнтинга.

$$\bar{G} = \frac{c}{4\pi} \bar{E} \times \bar{H} = \frac{c}{4\pi} E\bar{H},$$

где  $\bar{E}$  и  $\bar{H}$  – векторы напряжённости электрического и магнитного полей соответственно.

Направление вектора Умова-Пойнтинга перпендикулярно векторам  $\bar{E}$  и  $\bar{H}$  и совпадает с направлением распространения электромагнитной волны, а его величина равна энергии, переносимой в единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную вектору  $\bar{G}$ . Таким образом, вектор  $\bar{G} = v\bar{s}$ , где

$w$  – плотность энергии, а  $v$  – скорость распространения электромагнитных волн.

Строго монохроматическое поле, которое можно рассматривать как фурье-компоненту произвольного поля, создаёт гармонический осциллятор или набор подобных осцилляторов с одинаковой частотой излучения. В оптике обычно имеют дело с источниками, излучающими свет в узком, но конечном диапазоне частот. Такой источник можно рассматривать как набор большого числа гармонических осцилляторов, частоты которых попадают в указанный диапазон.

Для вычисления интенсивности света в какой-либо точке  $P$  пространства необходимо просуммировать все поля, созданные каждым осциллятором (элементом источника), т.е.

$$\begin{aligned}\bar{E} &= \sum_n \bar{E}_n; \\ \bar{H} &= \sum_n \bar{H}_n.\end{aligned}$$

Так как частоты колебаний в оптическом диапазоне излучения очень велики, непосредственно наблюдать мгновенные значения ни одной из таких быстро осциллирующих величин невозможно. Можно говорить лишь об их значениях, усреднённых за некоторый интервал времени, который велик по сравнению с периодом колебаний. Величина среднего по времени вектора Умова-Пойнтинга служит мерой интенсивности света в некоторой точке  $P$ , т.е.

$$\begin{aligned}I(P) &= \left| \langle \bar{G} \rangle \right| = \frac{c}{4\pi} \left| \langle \bar{E} \times \bar{H} \rangle \right| = \frac{c}{4\pi} \left| \sum_{n,m} \langle \bar{E}_n \times \bar{H}_m \rangle \right| = \\ &= \frac{c}{4\pi} \left| \sum_n \langle \bar{E}_n \times \bar{H}_n \rangle + \sum_{n \neq m} \langle \bar{E}_n \times \bar{H}_m \rangle \right|.\end{aligned}\tag{4.1}$$

Световые колебания, создаваемые различными элементами источника, можно считать независимыми (взаимно некогерентными), причём среднее значение поля равно нулю. Тогда

$$\sum_{n \neq m} \langle \bar{E}_n \times \bar{H}_m \rangle = 0.$$

Поэтому при решении многих оптических задач можно принять, что вторая сумма в выражении (4.1) равна нулю (в этих случаях говорят, что поля некогерентны).

Тогда

$$I(P) = \frac{c}{4\pi} \left| \sum_n \langle E_n \times H_n \rangle \right| = \left| \sum_n \langle G_n \rangle \right|, \quad (4.2)$$

где  $G_n$  – вектор Умова-Пойнтинга, соответствующий  $n$ -му элементу источника.

Направление усреднённого по времени вектора Умова-Пойнтинга совпадает с нормалью к геометрическому волновому фронту, а абсолютная его величина равна произведению средней плотности энергии  $\langle w \rangle$  на скорость распространения электромагнитных волн  $V$ . Волновой фронт излучения точечного источника в однородной среде имеет сферическую форму. Источники излучения конечного размера принято считать точечными, если их угловые размеры малы, при этом в геометрической оптике источник излучения считается точечным, если его угловой размер стремится к нулю.

Свет от источника распространяется, как правило, во все стороны, заполняя всё окружающее пространство. Для анализа пространственного распределения излучаемой источником энергии используют представление о телесном угле.

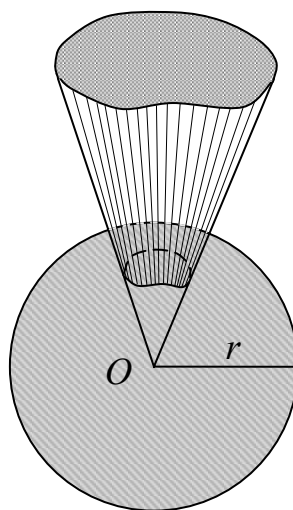


Рис.4.1. Телесный угол

Телесным углом называется часть пространства, заключённая внутри одной полости некоторой конической поверхности (с замкнутой направляющей), порождаемой движением прямой линии (образующей), проходящей через неподвижную точку (вершину конической поверхности), как показано на рис.4.1 при этом всякая (не проходящая через вершину) линия, которую образующая пересекает при своём движении, называется направляющей. Если вершина телесного угла расположена в центре сферы произвольного радиуса  $r$ , то коническая поверхность, ограничивающая телесный угол, выражает на сфере часть её поверхности, площадь  $S$  которой пропорциональна квадрату радиуса  $r$ , т.е.  $S = \omega r^2$ . Коэффициент  $\omega$  является мерой телесного угла. Единицей телесного угла является стерadian (ср). Телесный угол, равный одному стерadianу, соответствует части поверхности сферы, площадь которой равна площади квадрата со стороной, равной радиусу сферы.

Коническая поверхность телесного угла может принимать различные формы. Если это поверхность прямого кругового конуса с плоским углом  $2\alpha$  при вершине, то телесный угол (в стерadianах)  $\omega = 2\pi(1 - \cos \alpha) = 4\pi \sin^2 \frac{\alpha}{2}$ . Если конус телесного угла разворачивается в плоскость, то телесный угол, соответствующий полупространству, оказывается равным  $2\pi$  ср и, наконец, если площадь  $S$  охватывает всю поверхность сферы, то полный телесный угол в каждой точке пространства равен  $4\pi$  ср. Когда коническая поверхность сжимается около какого-то направления и площадь вырезаемой конусом поверхности сферы становится бесконечно малой, телесный угол также становится бесконечно малым и равным  $d\omega = \frac{dS}{r^2}$ .

Пусть  $\delta S$  – элемент поверхности волнового фронта, соответствующего определённой точке поверхности источника излучения. Через поверхность  $\delta S$  проходят конические пучки лучей, исходящих из каждой точки источника. Осевые лучи этих пучков заполняют конус с телесным углом  $d\omega$ , как показано

на рис.4.2. Если угол раствора конуса достаточно мал, то можно пренебречь зависимостью проекции вектора  $\overline{G}_n$  от направления и записать выражение (4.2) в виде:

$$I(P) = \sum_n |\langle \overline{G}_n \rangle| = \sum_n I_n. \quad (4.3)$$

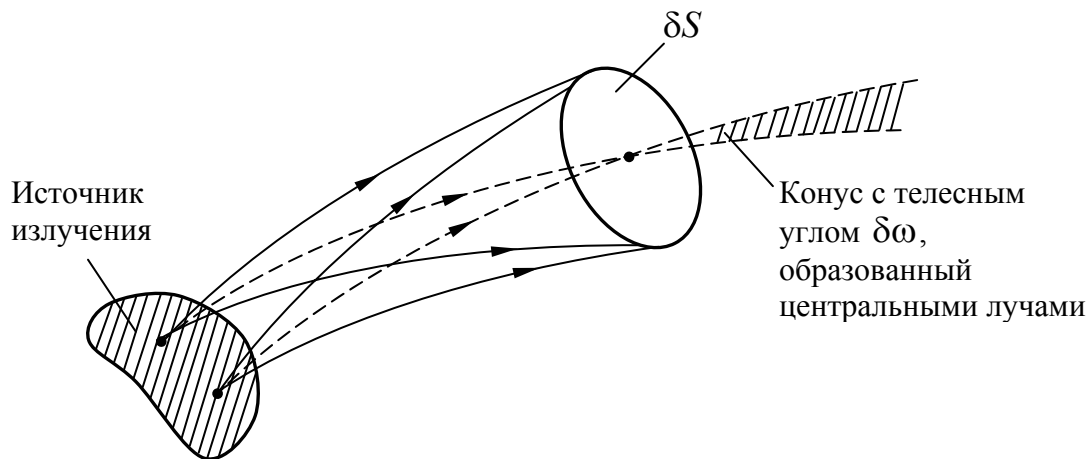


Рис.4.2. К выводу закона интенсивности в геометрической оптике для некогерентного источника излучения конечных размеров

Предположим, что число точечных источников (осцилляторов) настолько велико, что их распределение без существенной ошибки можно считать непрерывным. Вклад от каждого точечного источника бесконечно мал, однако, суммарный эффект конечен. В этом случае сумма (интеграл) пропорциональна телесному углу  $\delta\omega$ , т.е.

$$I(P) = L\delta\omega,$$

а полный (усреднённый по времени) поток энергии  $\delta\Phi_e$ , проходящий через элемент  $\delta S$  в единицу времени, равен

$$\delta\Phi_e = L\delta\omega\delta S. \quad (4.4)$$

Формула (4.4) играет важную роль в фотометрии.

## 4.2. Оптическое излучение. Световой поток. Энергетические и эффективные характеристики оптического излучения

Одним из видов энергии (греч. *energeia* – действие) является излучение, испускаемое телами естественного и искусственного происхождения. Такие тела называют источниками излучения. Известными каждому естественными источниками излучения являются Солнце, Луна, Земля, планеты и созвездия, небо, облака, полярные сияния. Искусственные источники оптического излучения могут быть тепловыми, люминесцентными и газоразрядными. Сюда же относятся светодиоды и лазеры.

Приёмниками излучения можно считать все тела живой и неживой природы, поглощающие излучение. По типу действия излучения различают приёмники тепловые (болометры, термоэлементы, терморезисторы и др.), фотоэлектрические (фотоэлементы, фотоумножители, фотосопротивления), фотографические (фотографические слои). Среди приёмников живой природы, прежде всего, можно назвать глаза (сетчатку глаз) и кожу человека и листья растений. Приёмники излучения обладают различным механизмом преобразования энергии излучения. Исследование этого механизма помогает наиболее эффективно использовать энергию излучения.

Как известно, любое материальное тело, имеющее температуру выше нуля абсолютной шкалы, излучает энергию в окружающее пространство. Следовательно, все тела, с которыми нам приходится иметь дело в жизни, непрерывно обмениваются энергией, так как любой поток излучения переносит энергию от излучающего тела к поглощающему. При тепловом излучении световое излучение обусловлено спонтанными переходами электронов с высоких уровней энергии на более низкие; инфракрасное излучение происходит за счёт изменения колебательного и вращательного движений атомов; при люминесцентном излучении атомы и электроны спонтанно переходят с высоких уровней энергии на более низкие, а возбуждаются электромагнитным полем. В газоразрядном источнике излучение возникает в результате электрического разряда в атмосфере инертных газов, паров металла или их смесей. Принцип действия излучающих полупроводниковых диодов (светодиодов) основан на явлении электролюминесценции при протекании тока

в структурах с  $p-n$ -переходом. Устройство, генерирующее когерентные электромагнитные волны за счёт вынужденного испускания или вынужденного рассеяния света активной средой, находящейся в оптическом резонаторе, называется лазером. Слово "лазер" представляет собой аббревиатуру слов английского выражения: "Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation" – усиление света вынужденным излучением.

Непрерывный спектр электромагнитного излучения распространяется от  $\gamma$ -лучей с минимальной длиной волны  $10^{-7}$  мкм, возникающих при распаде радиоактивных элементов, до длинноволновых радиоизлучений и излучений генераторов переменного тока промышленной частоты с длиной волны 6000 км. Средняя область спектра электромагнитного излучения, охватывающая инфракрасное излучение с длиной волн от 1 мм до 0,78 мкм, видимое излучение – от 0,78 мкм до 0,38 мкм и ультрафиолетовое излучение с длинами волн от 0,38 мкм до 0,01 мкм, носит название оптической области спектра. Излучение этой области спектра называется оптическим излучением. Объединение излучений этих спектральных областей в одну группу объясняется как единством принципов возбуждения оптического излучения, так и общностью методов их преобразования и использования.

Полная энергия излучения любого спектрального состава, переносимая электромагнитными волнами за единицу времени, значительно превышающую периоды световых колебаний, через какую-либо поверхность, определяет мощность излучения, которую в оптике принято называть потоком излучения или лучистым потоком. Количественной характеристикой излучения является его мощность (поток излучения)  $\Phi_e$ , а качественной характеристикой – его спектральный состав, при этом  $\Phi_e = \Phi_e(\lambda)$ , где  $\lambda$  – длина волны монохроматического излучения. Спектральный состав излучения определяется спектральной плотностью потока излучения, равной

$$\Phi_{e\lambda} = \frac{d\Phi_{e\lambda}}{d\lambda}.$$



Спектральная плотность потока излучения  $\Phi_{e\lambda}$  характеризует распределение энергии в спектре. При заданной (или известной) зависимости  $\Phi_{e\lambda}$  от  $\lambda$  полный поток излучения в области спектра от  $\lambda_1$  до  $\lambda_2$  определяется очевидным выражением вида:

$$\Phi_e = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \Phi_{e\lambda} d\lambda. \quad (4.5)$$

Спектр излучения называют сплошным, если спектральная плотность потока излучения  $\Phi_{e\lambda}$  – непрерывная функция  $\lambda$ , отличная от нуля в широком интервале длин волн. Сплошной спектр имеет, например, свет, излучаемый раскалёнными твёрдыми телами и жидкостями.

Спектр излучения называют линейчатым, если  $\Phi_{e\lambda}$  практически отлична от нуля лишь в узких дискретных интервалах длин волн  $\lambda_i \pm \frac{1}{2} \Delta\lambda_i$  ( $\Delta\lambda_i \ll \lambda_i$ ), каждому из которых соответствует своя спектральная линия. Линейчатый спектр имеют, например, газоразрядные источники излучения. Полный поток сложного излучения, имеющего линейчатый спектр, определяется суммированием:

$$\Phi_e = \Phi_{e\lambda_1} + \Phi_{e\lambda_2} + \dots + \Phi_{e\lambda_n} = \sum_{k=1}^{k=n} \Phi_{e\lambda_k}.$$

Спектр излучения называют полосатым, если соответствующие ему спектральные линии образуют дискретные группы – полосы, которые состоят из множества тесно расположенных линий. Непрерывную полосу имеют, например, спектр излучения люминофора в люминесцентном источнике излучения.

Для обнаружения излучения и количественной оценки (измерения) потока излучения применяют приёмники излучения (приёмники лучистой энергии), которые, как правило, неодинаково реагируют на потоки излучения различного спектрального состава. Такие приёмники называют селективными приёмниками. Следовательно, реакция селективного приёмника при воздействии на него потока излучения будет зависеть не только от величины

последнего, но и от спектрального состава излучения. В общем виде этой зависимости можно придать следующую математическую форму:

$$dX_{\lambda} = S_{\text{абс}}(\lambda)d\Phi_{e\lambda}, \quad (4.6)$$

где  $d\Phi_{e\lambda}$  – поток излучения в пределах малого спектрального диапазона  $d\Phi_{e\lambda} = \varphi_{e\lambda} d\lambda$ ;  $dX_{\lambda}$  – некоторая величина, характеризующая изменение реакции приёмника;  $S_{\text{абс}}(\lambda)$  – абсолютная спектральная характеристика чувствительности приёмника излучения.

Спектральная характеристика приёмника излучения определяет спектральный диапазон его работы.

Чувствительностью приёмника излучения называют отношение изменения измеряемой реакции приёмника (например, тока или напряжения), вызванного падающим на приёмник излучения, к количественной характеристике этого излучения в заданных эксплуатационных условиях. Абсолютной спектральной характеристикой чувствительности приёмника излучения называют зависимость монохроматической чувствительности  $S_{\text{абс}}(\lambda)$ , измеренной в абсолютных единицах, от длины волны падающего на приёмник потока излучения.

Если приёмником излучения является глаз человека, то величиной  $dX_{\lambda}$  принято считать световой поток  $d\Phi_{\lambda}$ , пропорциональный потоку излучения  $d\Phi_{e\lambda}$  и соответствующий вызываемому им зрительному ощущению в глазу, при этом коэффициент пропорциональности принято называть коэффициентом видности  $K_{\lambda}$ . В этом случае формула (4.6) имеет вид:

$$d\Phi_{\lambda} = K_{\lambda} d\Phi_{e\lambda}. \quad (4.7)$$

В большинстве случаев спектральные характеристики приёмников излучения имеют вид плавных кривых с одним максимумом при  $\lambda = \lambda_{\text{max}}$ , при этом абсолютная спектральная характеристика однотипных приёмников изменяется от приёмника к приёмнику. Однако, относительная спектральная характеристика чувствительности приёмника излучения  $S(\lambda) = \frac{S_{\text{абс}}(\lambda)}{S_{\lambda \text{max}}}$ ,

определяющая зависимость его монохроматической чувствительности, отнесённой к значению максимальной чувствительности, от длины волны регистрируемого излучения, остаётся практически неизменной для приёмников излучения одного и того же типа, но зависит от материала чувствительного слоя приёмника и для известных применяемых материалов приводится в справочниках. Зная из справочника  $S(\lambda)$  и измерив  $S_{\lambda_{\max}}$ , можно легко определить  $S_{\text{абс}}(\lambda)$ . Вполне очевидно, что относительная спектральная характеристика чувствительности приёмника излучения  $S(\lambda)$  может изменяться в пределах  $0 \leq S(\lambda) \leq 1$ . Учитывая изложенное, выражение (4.6) можно представить в виде:

$$dX_{\lambda} = S_{\text{абс}}(\lambda)\varphi_{\lambda} d\lambda = S_{\lambda_{\max}} S(\lambda)\varphi_{\lambda} d\lambda. \quad (4.8)$$

Чтобы получить полную реакцию приёмника от всего потока излучения, необходимо проинтегрировать выражение (4.8):

$$X = S_{\lambda_{\max}} \int_0^{\infty} S(\lambda)\varphi_{\lambda} d\lambda = S_{\lambda_{\max}} \Phi_{\text{эф}}.$$

Таким образом, эффективным потоком излучения  $\Phi_{\text{эф}}$  источника для данного приёмника излучения называют поток, который при чувствительности приёмника, постоянной по всему спектру и равной максимальному значению  $S_{\lambda_{\max}}$ , вызвал бы такую же реакцию приёмника, какую вызывает весь падающий реальный поток при реальной спектральной чувствительности. Интегральный поток от источника равен

$$\Phi_e = \int_0^{\infty} \varphi_{e\lambda} d\lambda.$$

Следовательно, можно определить интегральную чувствительность

$$S = \frac{X}{\Phi_e} = S_{\lambda_{\max}} \frac{\int_0^{\infty} S(\lambda)\varphi_{e\lambda} d\lambda}{\int_0^{\infty} \varphi_{e\lambda} d\lambda} = S_{\lambda_{\max}} \chi. \quad (4.9)$$

Отношение интегралов в полученном выражении показывает, какую долю в сложном потоке, падающем на приёмник излучения, составляет эффективный поток  $\Phi_{\text{эф}}$  для данных приёмника излучения и источника. Это отношение обозначают буквой  $\chi$  и называют коэффициентом использования потока излучения данным приёмником излучения или спектральным коэффициентом полезного действия (КПД) приёмника.

Если приёмником излучения является глаз человека, то относительную спектральную характеристику глаза называют функцией (или коэффициентом) относительной спектральной видности (или чувствительности глаза)  $V_\lambda$ , определяемой отношением

$$V_\lambda = \frac{K_\lambda}{K_{\lambda_{\text{max}}}}. \quad (4.10)$$

Как показали многочисленные экспериментальные исследования, коэффициент видности  $K_\lambda$  (при дневном зрении) достигает своего максимального значения  $K_{\lambda_{\text{max}}}$  при длине волны излучения  $\lambda_{\text{max}} = 0,555 \text{ мкм}$ , при этом при  $\lambda = \lambda_{\text{max}}$  функция относительной видности  $V_\lambda$  достигает своего максимального значения, равного единице. Из выражения (4.10) следует, что  $0 \leq V_\lambda \leq 1$ .

Итак, как следует из формул (4.7) и (4.10), монохроматическому потоку излучения  $d\Phi_{e\lambda}$  длины волны  $\lambda$  соответствует световой поток, равный

$$d\Phi_\lambda = K_\lambda d\Phi_{e\lambda} = K_{\lambda_{\text{max}}} V_\lambda d\Phi_{e\lambda}. \quad (4.11)$$

При сплошном спектре излучения распределение светового потока определяется спектральной плотностью светового потока

$$f_\lambda = \frac{d\Phi_\lambda}{d\lambda} = K_\lambda \frac{d\Phi_{e\lambda}}{d\lambda} = K_\lambda \Phi_{e\lambda},$$

где  $\Phi_{e\lambda}$  – спектральная плотность потока излучения.

Для светового потока в пределах малого спектрального диапазона (для элементарного потока) имеем

$$d\Phi_\lambda = f_\lambda d\lambda = K_\lambda \Phi_{e\lambda} d\lambda. \quad (4.12)$$

При этом световой поток сложного излучения со сплошным спектром равен

$$\Phi = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} K_{\lambda} \Phi_{e\lambda} d\lambda = K_{\lambda_{\max}} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} V_{\lambda} \Phi_{e\lambda} d\lambda. \quad (4.13)$$

Здесь  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  – длины волн, определяющие границы спектральной чувствительности глаза. За пределами видимой области спектра подинтегральная функция равна нулю.

### 4.3. Фотометрические величины и единицы их измерения

#### 4.3.1. Сила света

На некоторой ступени развития культуры и науки человек, получивший в своё распоряжение разнообразные источники искусственного света, начал интересоваться возможностью их сопоставительной количественной оценки. Одна из первых задач в области световых измерений состояла в том, чтобы определить какой из двух источников светит сильнее и во сколько раз.

В 1604 году Иоганн Кеплер сформулировал один из главных законов фотометрии, согласно которому освещение, производимое источником света, изменяется обратно пропорционально квадрату расстояния до него. Если два источника освещают поверхность, расположенную на расстоянии  $r_1$  и  $r_2$  от каждого из них, то при одинаковом освещении каждым из них в соответствии с законом, сформулированным И.Кеплером, имеем

$$\frac{I_1}{r_1^2} = \frac{I_2}{r_2^2}, \quad (4.14)$$

где  $I_1$  и  $I_2$  – величины, характеризующие свечение сравниваемых источников в направлении на освещаемую поверхность. Эти величины получили название сил света источников. Выражение (4.14) позволяет рассчитать во сколько раз сила света одного источника больше силы света другого.

Единица силы света, которая всегда была исходной для практики, воспроизводилась в разное время по-разному. Первыми эталонами силы света

были свечи. Сохранились сведения об английской спермацетовой свече и немецких парафиновых и стеариновых свечах, которые изготавливались особенно тщательно.

Во Франции около 1800 года свеча была заменена лампой Карселя, к фитилю которой подводилось сурепное масло. В Англии в 1887 году была предложена пентановая лампа, в бесфитильной горелке которой сгорала смесь паров пентана и подогретого воздуха. Из эталонов, питаемых жидким топливом, наиболее практичной оказалась лампа Гефнера, в тщательно стандартизованный корпус, которой наливался химически чистый амилацетат. Лампа Гефнера служила эталоном в Германии, Австрии, Швейцарии и некоторых других странах до 1948 года.

Значительно более удобными в работе были эталоны, использующие свечение твёрдых тел. В 1879 году француз Виоль предложил считать единицей ту силу света, которую даёт в направлении, перпендикулярном к поверхности, квадратный сантиметр чистой платины при температуре её затвердевания. Эта единица (единица Виоля) была примерно в 20 раз больше пентановой свечи. Однако, этот эталон оказался нестабильным и от него вскоре пришлось отказаться.

В 1909 году метрологические учреждения Англии, Франции и США согласились поддерживать некоторую новую единицу силы света, близкую к пентановой свече, с помощью группы тщательно изготовленных и постоянно контролируемых ламп накаливания. Первоначально групповой эталон состоял из угольных ламп, а в дальнейшем были созданы аналогичные группы из вольфрамовых ламп. Зафиксированной таким образом единице силы света было присвоено название "международная свеча". С 1924 года эта единица силы света была принята в СССР. Ею пользовались до 1948 года, когда она повсеместно была заменена канделой (кд) (от английского candle – свеча).

Ещё в 1947 году канделу (в то время её называли новой свечой) было принято воспроизводить с помощью эталона, использующего свечение абсолютно чёрного тела, яркость которого при температуре затвердевания

чистой платины было решено считать равной  $60\text{кд}\cdot\text{см}^{-2}$ . С 1 января 1948 года эта единица была повсеместно принята за основу измерения всех фотометрических величин. Важно отметить, что единица силы света является одной из семи основных единиц Международной системы – СИ.

Сила света источника в общем случае зависит от направления излучения и в разных направлениях бывает весьма различной. Если источник имеет форму цилиндра (например, прямая газосветная лампа), то его наибольшая сила света направлена перпендикулярно к оси цилиндра, а наименьшая – вдоль оси. Нередко можно встретить графическое изображение распределения силы света источника в виде кривой в полярной системе координат, радиусы-векторы которой пропорциональны силам света источника в соответствующих направлениях. Такая кривая даёт наглядное представление о распределении света, излучаемого источником, чем светильником, т.е. источником, помещённым в некоторую арматуру.

#### 4.3.2. Световой поток

Предположим, что источник  $dS_u$  излучает свет в окружающее пространство в пределах телесного угла  $d\omega_u$ , вершина которого совпадает с источником  $dS_u$ . Будем считать, что в некотором направлении сила света (в канделах) в пределах телесного угла  $d\omega_u$  равна  $dI$ . С центром в вершине телесного угла построим сферы радиусов  $r_1, r_2$  и  $r_3$ , как показано на рис.4.3, и обозначим через  $dS_1, dS_2$  и  $dS_3$  элементарные площадки, вырезанные конусом телесного угла  $d\omega_u$  на соответствующих сферах. Согласно закону обратной пропорциональности квадрату расстояния освещённость площадок пропорциональна отношениям  $\frac{dI}{r_1^2}, \frac{dI}{r_2^2}, \frac{dI}{r_3^2}$ . За единицу времени на площадке  $dS_1, dS_2$  и  $dS_3$  упадёт одна и та же энергия, которая переносится

рассматриваемым пучком лучей в пределах угла  $d\omega_u$ . Составив произведения

$\frac{dI}{r_1^2}dS_1$ ,  $\frac{dI}{r_2^2}dS_2$  и  $\frac{dI}{r_3^2}dS_3$ , замечаем, что каждое из них равно  $dId\omega_u$ , так как

$$\frac{dS_1}{r_1^2} = \frac{dS_2}{r_2^2} = \frac{dS_3}{r_3^2} = d\omega_u.$$

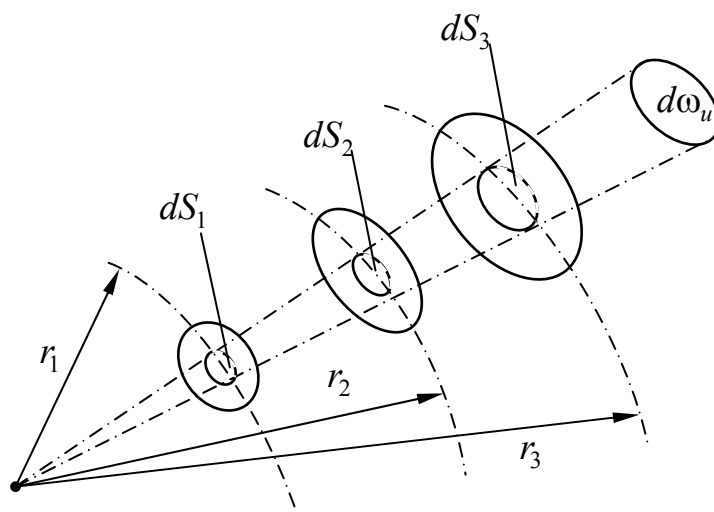


Рис.4.3. Световой поток источника  $dS_u$  внутри телесного угла  $d\omega_u$

Величина

$$d^2\Phi = dId\omega_u \tag{4.15}$$

равная световой мощности, переносимой пучком лучей, распространяющимся внутри телесного угла  $d\omega_u$ , получила название светового потока.

Световой поток, определяемый соотношением (4.15) представляет собой ту часть полного светового потока, излучаемого источником  $dS_u$ , которая приходится на телесный угол  $d\omega_u$ . Если сила света источника зависит от направления распространения излучения, то полный световой поток  $d\Phi$ , излучаемый источником  $dS_u$  в окружающее пространство, равен

$$d\Phi = \int_{\omega_u} dId\omega_u, \tag{4.16}$$

где  $\omega_u \leq 4\pi$ .

Единица светового потока – люмен (лм) (от латинского lumen – свет, лампа), при этом световой поток, распространяющийся внутри телесного угла в



$1\text{ср}$  при силе света источника, расположенного в его вершине, равной  $1\text{кд}$ , равен  $1\text{лм}$ , т.е.  $\text{лм}=\text{кд}\cdot\text{ср}$ . В светотехнической практике часто пользуются представлением о средней сферической силе света  $I_0$  источника излучения как о силе света такого условного источника  $S_u$ , который, излучая одинаково во все стороны, излучает такой же световой поток, что и реальный источник. Вполне очевидно, что полный световой поток  $\Phi$  источника связан с его средней сферической силой света  $I_0$  простым соотношением:

$$\Phi = 4\pi I_0.$$

При определении понятий силы света и светового потока предполагалось, что источник света расположен в вершине телесного угла, т.е. в точке. Однако, источник излучения точкой физически быть не может. Следует обратить внимание на то обстоятельство, что понятие силы света источника непосредственно связано с направлением излучения, при этом лучи, исходящие из разных точек источника и падающие на освещаемый предмет, должны располагаться внутри малого телесного угла. В равной мере и расстояние от источника до освещаемой поверхности приобретает определённую только тогда, когда размер источника мал по сравнению с расстоянием, на котором определяется создаваемое им освещение. Прекрасным примером точечного источника могут служить звёзды, каждая из которых имеет огромные размеры. Однако, расстояние до звёзд столь велико, что их размеры не мешают точному определению направления на них. Таким образом, чем больше расстояние, на котором наблюдается световое действие источника, тем с большим основанием можно считать его точечным. Так, например, если источником излучения служит равномерность светящийся диск, то погрешность определения силы света не превышает 1%, если расстояние до источника превосходит его диаметр всего лишь в пять раз.

#### **4.3.3. Освещённость. Светимость**

Величина

$$dE_n = \frac{dI}{r^2}, \quad (4.17)$$

которая определяет величину освещения на поверхности, расположенной на расстоянии  $r$  от источника излучения  $dS_u$  с силой света  $dI$ , при нормальном падении лучей, как показано на рис.4.4, называется освещённостью поверхности. За единицу освещённости принимается такая освещённость, которую создаёт источник излучения силой света в 1кд на поверхности, расположенной нормально к направлению излучения на расстоянии 1м от источника. Единица освещённости – люкс (лк) (от латинского lux – свет солнца, освещение).

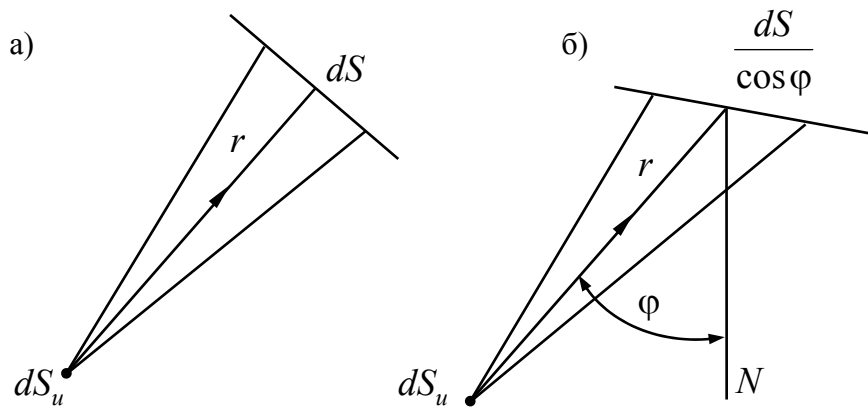


Рис.4.4. Лучи источника излучения  $dS_u$ , падающие на поверхность  $dS$  по нормали к ней (а) и под углом  $\varphi$  к нормали (б)

Умножим числитель и знаменатель отношения (4.17) на бесконечно малый телесный угол  $d\omega_u$ , в котором сила света источника  $dS_u$  равна  $dI$ . В результате получаем

$$dE_n = \frac{dI d\omega_u}{r^2 d\omega_u} = \frac{d^2\Phi}{dS_0},$$

где  $d^2\Phi = dI d\omega_u$  – световой поток, распространяющийся от источника  $dS_u$  в телесный угол  $d\omega_u$ , а  $dS_0 = r^2 d\omega_u$  – площадь элемента поверхности, нормальной к направлению излучения, на которой попадает этот поток. Отсюда следует, что освещённость поверхности представляет собой поверхностную плотность падающего на неё светового потока. Таким образом, единица

освещённости люкс определяет такую поверхностную плотность светового потока, при которой световой поток в 1 лм покрывает поверхность площадью, равной  $1 \text{ м}^2$ . Если лучи от источника падают на поверхность под углом  $\varphi$  к нормали  $N$  к поверхности, как показано на рис.4.4, то тот же световой поток  $d^2\Phi$  падает на площадку  $dS = \frac{dS_0}{\cos\varphi}$ . В этом случае

$$dE_\varphi = \frac{dI}{r^2} \cos\varphi = dE_n \cos\varphi. \quad (4.18)$$

Каждый элемент  $dS_m$  излучающей или освещённой поверхности излучает или отражает в окружающее пространство (точнее, в полупространство, измеряемое телесным углом  $2\pi$ ) некоторый световой поток  $d^2\Phi_{\text{изл}}$ . Поверхностная плотность излучаемого или отражённого светового потока

$$dM = \frac{d^2\Phi_{\text{изл}}}{dS_m} \quad (4.19)$$

называется светимостью. Единица светимости – люмен на квадратный метр ( $\text{лм} \cdot \text{м}^{-2}$ ).

#### 4.3.4. Яркость

Предположим, что бесконечно малый элемент  $dS_u$  излучающей поверхности освещает бесконечно малый элемент  $dS_m$  некоторой поверхности, расположенной на расстоянии  $r$  от  $dS_u$ . Будем считать, что из каждой точки элемента  $dS_u$  лучи проходят через принятую в качестве осевой точку элемента  $dS$ , образуя телесный угол  $d\omega$ . При этом световой поток, падающий на поверхность элемента  $dS$ , в соответствии с выражением (4.4) равен

$$d^2\Phi = L d\omega dS_0 = L d\omega dS \cos\varphi,$$

где  $\varphi$  – угол между осью телесного угла  $d\omega$  и нормалью к элементу  $dS$ . Коэффициент пропорциональности  $L$  называется яркостью излучающего элемента  $dS_u$  в направлении к освещаемому элементу  $dS$ . Телесный угол в этом уравнении

$$d\omega = \frac{dS_u}{r^2} \cos \varphi_u,$$

где  $\varphi_u$  – угол между осью телесного угла  $d\omega$  и нормалью к элементу  $dS_u$ . При этом

$$d^2\Phi = L \frac{dS_u \cos \varphi_u dS \cos \varphi}{r^2}. \quad (4.20)$$

Заметим, что отношение  $\frac{dS \cos \varphi}{r^2}$  определяет телесный угол  $d\omega_u$  с вершиной в любой точке элемента  $dS_u$ .

В соответствии с выражением (4.15) световой поток  $d^2\Phi = dId\omega_u$ . При этом из выражения (4.20) следует, что

$$L = \frac{d^2\Phi}{dS_u \cos \varphi_u d\omega_u} = \frac{dI}{dS_u \cos \varphi_u}. \quad (4.21)$$

Выражение (4.21) определяет яркость поверхности  $S_u$  в любой её точке и в любом направлении (при любом значении угла  $\varphi_u$ ) отношением силы света элемента поверхности в выбранном направлении к площади проекции этого элемента на плоскость, перпендикулярную направлению силы света. Отсюда следует, что за единицу яркости следует принять яркость такой поверхности, для которой сила света, выраженная в канделах, равна выраженной в квадратных метрах площади её проекции на плоскость, перпендикулярную к направлению силы света. Таким образом, единица яркости – кандела на квадратный метр (кд·м<sup>-2</sup>).

Выражение (4.20) можно представить в виде:

$$d^2\Phi = LdS_0 \cos \varphi_u d\omega_u = LdS \cos \varphi d\omega. \quad (4.22)$$

В этом выражении в среднюю часть входят величины, относящиеся только к площадке излучателя  $dS_u$ , а в правую часть – те же величины, но относящиеся к площадке  $dS$ . Если площадку  $dS$  перемещать в направлении пучка лучей, сохраняя её величину и угол падения  $\varphi$ , то как телесный угол  $d\omega_u$ , так и телесный угол  $d\omega$ , а, соответственно и световой поток  $d^2\Phi$ , будут

изменяться пропорционально изменению обратной величины квадрата расстояния между площадками. Следовательно, яркость  $L$  должна оставаться постоянной в направлении рассматриваемого пучка лучей и равной яркости элемента  $dS_u$  в этом направлении. Это справедливо только в тех случаях, когда среда, через которую распространяется пучок лучей, не поглощает и не рассеивает свет.

Изложенные соображения позволяют распространять понятие яркости поверхности на пучок световых лучей, при этом представление о яркости светового пучка следует считать более общим. Понятие яркости пучка лучей, введённое в трудах академика Владимира Александровича Фока, Андрея Александровича Гершуна, Сергея Осиповича Майзеля и др., оказалось весьма удобным при исследовании объёмных источников или рассеивающих излучение сред, например, безоблачного неба, где невозможно указать поверхность, с которой можно было бы связать определение яркости, т.е. в подобных случаях понятие яркости поверхности вообще теряет смысл. Единственным объектом, которому можно приписать, например, яркость безоблачного неба, является сам пучок световых лучей, пришедший к нам с того или иного направления.

Обратимся вновь к выражению (4.22), из которого находим, что

$$L = \frac{d^2\Phi}{dS \cos\varphi d\omega} = \frac{dE_\varphi}{\cos\varphi d\omega} = \frac{dE_n}{d\omega},$$

т.е. яркость элементарного пучка лучей пропорциональна освещённости, которую он создаёт на перпендикулярной к нему поверхности и обратно пропорциональна телесному углу, который он заполняет.

Из выражения (4.21) следует, что

$$dI = L dS_u \cos\varphi_u. \quad (4.23)$$

Для элемента источника, излучающего по закону Ламберта, яркость излучающей поверхности одинакова по всем направлениям. Если для всех направлений (т.е. для всех значений угла  $\varphi_u$ )  $L(\varphi_u) = L = const$ , то

$$dI = dI_0 \cos\varphi_u,$$

где  $dI_0 = LdS_u$  – сила света излучающего элемента  $dS_u$  в нормальном к нему направлении (т.е. при  $\varphi_u = 0$ ). Если для всех точек светящейся поверхности  $S_u$  справедлив закон Ламберта, то  $I = I_0 \cos \varphi_u$ .

Если поверхность  $dS_u$  излучает равномерно во всех направлениях, то полный световой поток, излучаемый элементом  $dS_u$  по одну сторону от себя, равен

$$d\Phi = LdS_u \int_0^{2\pi} \cos \varphi_u d\omega_u .$$

Телесный угол  $\omega_u = 2\pi(1 - \cos \varphi_u)$ , и, соответственно,  $d\omega_u = 2\pi \sin \varphi_u d\varphi_u$ .

Тогда

$$d\Phi = \pi LdS_u \int_{\varphi_u=0}^{\varphi_u=\frac{\pi}{2}} 2 \sin \varphi_u \cos \varphi_u d\varphi_u = \pi LdS_u .$$

При этом светимость поверхности

$$M = \frac{d\Phi}{dS_u} = \pi L . \tag{4.24}$$

Пусть освещённость поверхности равна  $E$ . Светимость идеально рассеивающей поверхности  $M = E$ , а яркость её в соответствии с соотношением (4.24) равна  $L = \frac{E}{\pi}$ . Значение идеального рассеивателя состоит в том, что с его предельными свойствами удобно сравнивать свойства всех реальных материалов.

#### 4.3.5. Световая энергия. Экспозиция

Классическая фотометрия, основы которой были заложены трудами П.Бугера и И.Ламберта в XVIII веке, предполагают применение непрерывно излучающих источников, отвечающих требованиям стабильности излучения в течение длительного времени, которое само по себе значения не имело. Однако, уже давно стали выявляться случаи, в которых длительность свечения играла существенную роль. Примером такого случая может служить применение

импульсных источников света, которые с некоторых пор начали приобретать всё более широкое распространение. Длительность свечения импульсных источников излучения измеряется иногда тысячными и даже миллионными долями секунды, что очень существенно, например, для фотографии. Излучение импульсного источника обладает переменной мощностью, которая, возрастая от нуля, достигает за малые доли секунды своего максимального значения, а затем падает до нуля. Поэтому излучение импульсного источника характеризуют или длительностью импульса и максимальной мощностью излучения или энергией импульса, которая определяется интегралом от мощности по времени излучения.

Одним из видов навигационного ограждения пути корабля в море, осуществляемому с помощью плавающих буёв или бакенов, являются проблесковые огни. В тёмное время суток эти огни, вспыхивающие периодически на десятые доли секунды, позволяют мореплавателю определять своё местоположение. Темновые паузы имеют значительно большую длительность. Инерционные свойства глаза заставляют принимать во внимание не только силу света проблескового огня, но и длительность свечения.

При фотометрических процессах (фотография, фотосинтез) результат также зависит не только от освещённости светочувствительного слоя, но и от времени освещения.

В связи с тем, что число таких случаев непрерывно растёт и они приобретают всё большее значение, оказалось необходимым пополнить фотометрическую систему рядом новых величин, из которых в первую очередь надо отметить следующие:

1. Световая энергия  $Q$  в соответствии с определением равна

$$Q = \int_0^{\tau} \Phi dt \quad (4.25)$$

и измеряется в люмен-секундах (лм·с).

2. Экспозиция (или количество освещения)  $H$  определяется интегралом

$$H = \int_0^{\tau} E dt \quad (4.26)$$

и измеряется в люкс-секундах (лк·с).

Но  $\Phi = \int_S EdS$ . Тогда  $dQ = \int_{\tau} EdSdt = HdS$ . При этом

$$H = \frac{dQ}{dS}. \quad (4.27)$$

Из последнего выражения следует, что экспозиция  $H$  представляет собой поверхностную плотность световой энергии.

#### 4.4. Энергетические величины

Итак, распределение светового потока по телесному углу определяется силой света, по поверхности – освещённостью или светимостью, а одновременно по телесному углу и по поверхности – яркостью. Представление о световом потоке и обо всех связанных с ним величинах формировалось в процессе развития визуальной фотометрии. Существенными факторами, определяющими формирование этих представлений, во-первых, было то, что невидимые излучения ещё не были известны, и, во-вторых, то, что глаз человека был единственным средством обнаружения и оценки излучения любого источника. Таким образом, световой поток оказывался естественной мерой всякого излучения.

##### 4.4.1. Связь между световыми и энергетическими величинами

К видимому свету, свойства которого были изучены ещё И.Ньютоном, добавились открытые в начале XIX века инфракрасное и ультрафиолетовое излучения. Позже была установлена их общая электромагнитная природа и общая скорость распространения в вакууме. Появились разнообразные приёмники излучения, чувствительные к излучению различного спектра, а соответственно расширился и спектральный диапазон применяемого излучения. Одновременно с этим во всё большей степени ощущалась



необходимость оценки общей мощности переносимого электромагнитного излучения независимо от его спектрального состава, которая получила название потока излучения (или лучистого потока). Поток излучения принято обозначать буквой  $P$  или  $\Phi_e$  и, как всякую мощность, измерять в ваттах. Как естественное средство того, что поток излучения становится основой радиационной энергетики, возникла потребность во всех видах производных величин, применяемых для характеристики его пространственного распределения, т.е. появилась необходимость в системе энергетических величин, построенных аналогично системе световых (визуальных) величин. Отличие этих новых величин от прежних состоит только в том, что вместо светового потока в их определении входит поток излучения.

Наиболее естественным и удобным способом наименования этих новых энергетических величин принят такой, при котором за каждой энергетической величиной сохраняется название её светового аналога с добавлением слова "энергетической". Что касается обозначения, то за каждой энергетической величиной сохраняется обозначение, используемое для аналогичного светового понятия, с добавлением внизу индекса  $e$ . Таким образом, плотность потока излучения по телесному углу получает название энергетической силы света или силы излучения источника и определяется соотношением  $I_e = \frac{d\Phi_e}{d\omega}$ , где  $d\Phi_e$  –

бесконечно малый поток излучения, распространяющийся от источника внутри бесконечно малого телесного угла  $d\omega$ . Энергетическая сила света измеряется в ваттах на стерадиан ( $\text{Вт}\cdot\text{ср}^{-1}$ ). Поверхностная плотность потока излучения имеет

следующие названия: энергетическая освещённость, равная  $E_e = \frac{d\Phi_{\text{епад}}}{dS}$ , и

энергетическая светимость, равная  $M_e = \frac{d\Phi_{\text{еизл}}}{dS_u}$ , где  $d\Phi_{\text{епад}}$  и  $d\Phi_{\text{еизл}}$  –

бесконечно малые потоки, падающий на элемент поверхности и излучаемый элементом поверхности. Соответственно, эти величины измеряют в ваттах на квадратный метр ( $\text{Вт}\cdot\text{м}^{-2}$ ). Аналогичным образом вводится и понятие об

энергетической яркости как о поверхностной плотности энергетической силы света, равной

$$L_e = \frac{dI_e}{dS \cos \varphi},$$

т.е. об энергетической силе света, отнесённой к площади проекции элемента поверхности на плоскость, перпендикулярную к направлению энергетической силы света. Эта величина измеряется в ваттах настерадиан и на квадратный метр ( $\text{Вт} \cdot \text{ср}^{-1} \cdot \text{м}^{-2}$ ).

#### 4.4.2. Световая эффективность

При сплошном спектре полный поток излучения в соответствии с формулой (4.5) равен

$$\Phi_e = \int_0^{\infty} d\Phi_{e\lambda} = \int_0^{\infty} \varphi_{e\lambda} d\lambda. \quad (4.28)$$

Если поток излучения  $d\Phi_{e\lambda}$  приходится на видимую часть спектра, то при этом возможно световое воздействие излучения на глаз и ощущение некоторого светового потока  $d\Phi_\lambda$ , в соответствии с выражением (4.11) равного

$$d\Phi_\lambda = K_{\lambda \max} V_\lambda \varphi_{e\lambda} d\lambda, \quad (4.29)$$

где  $K_{\lambda \max}$  – коэффициент пропорциональности, который называют максимальной световой эффективностью излучения. Если мощность измеряется в ваттах, а световой поток – в люменах, то коэффициент  $K_{\lambda \max}$  равен числу люменов светового потока, вызванного потоком излучения в один ватт при той длине волны излучения, при которой  $V_\lambda = 1$ , т.е. при  $\lambda_0 = 0,555 \text{ мкм}$ .

Развитие фотометрии как теоретической, так и экспериментальной, позволило Международному комитету мер и весов принять в 1977 году, что 1ВТ излучения частоты  $\nu_0 = 540 \cdot 10^{12} \text{ Гц}$  ( $\lambda_0 = \frac{c}{\nu_0} = 0,555 \text{ мкм}$ ), обладающего

наибольшей световой эффективностью при дневном освещении, эквивалентен 683лм светового потока.

Световой эффективностью излучения называют отношение светового потока к потоку вызвавшего его излучения. Вполне очевидно, что световая эффективность излучения зависят от спектрального состава излучения и равна нулю в тех случаях, когда излучение не содержит потока в видимой части спектра. Световая эффективность солнечного излучения близка к  $100\text{лм}\cdot\text{Вт}^{-1}$ , а для монохроматических потоков световая эффективность  $K_\lambda = V_\lambda K_m$ , где  $K_m = 683\text{лм}\cdot\text{Вт}^{-1}$ , а  $V_\lambda$  – относительная спектральная чувствительность глаза.

Световой поток источника излучения сложного спектрального состава может быть определён как сумма элементарных световых потоков всех его монохроматических составляющих:

$$\Phi = K_m \int_{\lambda} V_\lambda d\Phi_{e\lambda} = K_m \int_{\lambda} V_\lambda \varphi_{e\lambda} d\lambda. \quad (4.30)$$

Это выражение определяет понятие светового потока, откуда следует, что световой поток является величиной, пропорциональной потоку излучения, оценённому в соответствии с относительной спектральной чувствительностью среднего глаза.

Иногда световой поток выражают в ваттах, условно называемых световыми ваттами, число которых считается равным интегралу  $\int_{\lambda} V_\lambda d\Phi_{e\lambda}$ , если поток излучения  $d\Phi_{e\lambda} = \varphi_{e\lambda} d\lambda$  выражен в ваттах. Важно обратить внимание на то, что один световой ватт эквивалентен 683лм независимо от спектрального состава излучения.

Отношение светового потока в световых ваттах к потоку излучения в ваттах представляет собой безразмерную величину, равную

$$\eta = \frac{\int_{\lambda} V_\lambda \varphi_{e\lambda} d\lambda}{\int_{\lambda} \varphi_{e\lambda} d\lambda} \quad (4.31)$$

которую называют световым коэффициентом полезного действия (к.п.д.) излучения. Величина этого коэффициента может достигать единицы, если речь идёт о монохроматическом излучении с длиной волны  $\lambda = 0,555$  мкм. Во всех других случаях световой к.п.д. излучения меньше единицы и падает до нуля, если излучение не захватывает видимой области спектра.

Заметим, что произведение  $K_m \eta = 683 \eta \text{ лм} \cdot \text{Вт}^{-1}$  определяет световую эффективность излучения, которая, естественно, зависит от его спектрального состава и может принимать значения от  $683 \text{ лм} \cdot \text{Вт}^{-1}$  до нуля. Следует различать световую эффективность излучения и световую эффективность источника, которая равна отношению светового потока к мощности, потребляемой им от источника энергии, например, от электрической сети. Световая эффективность источников света колеблется от  $8 \div 9 \text{ лм} \cdot \text{Вт}^{-1}$  для низкотемпературных вакуумных ламп накаливания (у вакуумных ламп давление остаточных газов в колбе после откачки  $10^{-5} \div 10^{-7}$  мм рт.ст.) до  $9 \div 13,5 \text{ лм} \cdot \text{Вт}^{-1}$  для высокотемпературных газонаполненных ламп накаливания (у газонаполненных ламп после откачки колба заполняется смесью инертных газов, давление которых у холодной лампы приближённо равно 600 мм рт.ст.). Световая эффективность ламп накаливания с йодным циклом достигает  $25 \div 30 \text{ лм} \cdot \text{Вт}^{-1}$  при среднем сроке службы до 2000 ч.

Большая заслуга в создании электрических ламп накаливания принадлежит выдающемуся русскому учёному Александру Николаевичу Лодыгину (1847–1923), который разработал конструкцию ламп накаливания с угольной нитью в 1872 году и создал первые образцы ламп, пригодных для работы. Американский изобретатель и предприниматель Томас Алва Эдисон (1847–1931) усовершенствовал лампу накаливания, предложив в 1879 году конструкцию лампы, основные принципиальные элементы которой сохранились до настоящего времени.

Выдающаяся роль в деле создания газоразрядных источников света принадлежит русским электротехникам. Академик Петербургской АН Василий

Владимирович Петров (1761–1834) в 1802 году первым получил устойчивую электрическую дугу в воздухе и указал на возможность её использования в качестве источника света. Однако, лишь спустя 70 лет удалось осуществить на этом принципе источник, приемлемый для целей освещения. Заслуга эта принадлежит известному русскому изобретателю Петру Николаевичу Яблочкову (1847–1894), создавшему источник, нашедший применение как в России, так и за рубежом и получивший название "свеча Яблочкова". Световая эффективность современных газоразрядных ламп равна: натриевых ламп – до  $1009 \text{ лм} \cdot \text{Вт}^{-1}$ , люминесцентных ламп – до  $70\text{--}80 \text{ лм} \cdot \text{Вт}^{-1}$ , ртутных ламп высокого давления (ВД) и сверхвысокого давления (СВД) – до  $60 \text{ лм} \cdot \text{Вт}^{-1}$ , а газовых ламп ВД и СВД – до  $45\text{--}50 \text{ лм} \cdot \text{Вт}^{-1}$ . При значительно более высокой световой эффективности (световой отдаче), чем у ламп накаливания, газоразрядные лампы имеют и значительно больший срок службы. Если средний срок службы осветительной лампы накаливания равен 1000ч. и не может быть увеличен без снижения и без того низкой световой эффективности, то срок службы современных люминесцентных ламп достигает 14000ч.

Легко видеть, что равенства, подобные равенству (4.30), можно составить не только для светового потока, но и для любой другой фотометрической величины. Например, для яркости, выраженной в канделах на квадратный метр, справедливо равенство:

$$L = K_m \int_{L_e} V_\lambda dL_e = K_m \int_{\lambda} V_\lambda L_{e\lambda} d\lambda, \quad (4.32)$$

где  $V_\lambda$  имеет прежнее значение, а  $dL_e = L_{e\lambda} d\lambda$  – энергетическая яркость, приходящаяся на спектральный интервал  $\lambda, \lambda + d\lambda$ ,  $\text{Вт} \cdot \text{ср}^{-1} \cdot \text{м}^{-2}$ . Заметим, что яркость излучения капиллярных ртутно-кварцевых ламп СВД с водяным охлаждением достигает  $(1,5 \div 1,8) \cdot 10^9 \text{ кд} \cdot \text{м}^{-2}$  при средней визуальной яркости Солнца  $L = 1,95 \cdot 10^9 \text{ кд} \cdot \text{м}^{-2}$ .

#### 4.5. Фотометрические свойства тел

Фотометрические свойства окружающих нас предметов определяют яркость и цветность (окраску), которые они принимают под влиянием падающего излучения.

#### 4.5.1. Общие соотношения

Для определённости будем считать, что освещённый предмет представляет собой плоский слой прозрачного вещества, как показано на рис.4.5, толщина которого мала по сравнению с линейными размерами его освещаемой поверхности. Пусть на поверхность слоя из пространства, расположенного перед ним падает произвольно распределённый по направлениям световой поток  $\Phi_{\text{пад}}$ . Освещённый слой разделит упавший на него световой поток на три части: поток  $\Phi_{\text{отр}}$ , отражённый от слоя в ту полусферу, из которой пришёл падающий поток; поток  $\Phi_{\text{пр}}$ , прошедший через слой и вышедший в другую полусферу, и поглощённый поток  $\Phi_{\text{погл}}$ , который в веществе слоя превратится в теплоту или другую форму энергии.

В соответствии с законом сохранения энергии сумма отражённого, прошедшего и поглощённого световых потоков равна падающему потоку:

$$\Phi_{\text{отр}} + \Phi_{\text{пр}} + \Phi_{\text{погл}} = \Phi_{\text{пад}}$$

или

$$\frac{\Phi_{\text{отр}}}{\Phi_{\text{пад}}} + \frac{\Phi_{\text{пр}}}{\Phi_{\text{пад}}} + \frac{\Phi_{\text{погл}}}{\Phi_{\text{пад}}} = 1. \quad (4.33)$$

Отношение светового потока, отражённого от слоя, к световому потоку, падающему на слой, называется коэффициентом отражения слоя и обозначается буквой  $\rho$ .

Отношение светового потока, прошедшего через слой, к световому потоку, падающему на слой, называется коэффициентом пропускания слоя и обозначается буквой  $\tau$ .

Отношение светового потока, поглощённого в слое, к световому потоку, падающему на слой, называется коэффициентом поглощения слоя и обозначается буквой  $\alpha$ .

При этом в соответствии с формулой (4.33) имеем

$$\rho + \tau + \alpha = 1. \quad (4.34)$$

Для окрашенных веществ эти коэффициенты зависят от спектрального состава падающего излучения. Для монохроматического излучения с длиной волны  $\lambda \pm \delta\lambda$  их принято обозначать  $\rho(\lambda)$ ,  $\tau(\lambda)$  и  $\alpha(\lambda)$ . Спектральную зависимость коэффициентов  $\rho(\lambda)$ ,  $\tau(\lambda)$  и  $\alpha(\lambda)$  удобно изображать графически, откладывая по оси абсцисс длину волны  $\lambda$ , а по оси ординат – один из коэффициентов. Пример такого графика показан на рис.4.6.

Поток излучения любого спектрального состава всегда можно рассматривать как сумму большого числа монохроматических составляющих с мощностями  $d\Phi_{e\lambda} = \varphi_{e\lambda} d\lambda$ , каждая из которых, попав на слой, претерпевает изменения, зависящие от его спектральных свойств. При этом мощности отражённой, пропущенной и поглощённой монохроматической составляющей излучения могут быть представлены в виде произведений:

$$\rho(\lambda)\Phi_{e\lambda}, \tau(\lambda)\Phi_{e\lambda} \text{ и } \alpha(\lambda)\Phi_{e\lambda}.$$

Световой поток падающего излучения можно определить выражением (4.30) в виде:

$$\Phi_{\text{пад}} = K_m \int_{\lambda} V_{\lambda} d\Phi_{e\lambda} = K_m \int_{\lambda} V_{\lambda} \varphi_{e\lambda} d\lambda.$$

Вполне очевидно, что световые потоки: отражённый от слоя, прошедший через него и поглощённый в нём, определяются подобными интегралами вида:

$$\Phi_{\text{отр}} = K_m \int_{\lambda} \rho(\lambda) V_{\lambda} \varphi_{e\lambda} d\lambda;$$

$$\Phi_{\text{пр}} = K_m \int_{\lambda} \tau(\lambda) V_{\lambda} \varphi_{e\lambda} d\lambda;$$

$$\Phi_{\text{погл}} = K_m \int_{\lambda} \alpha(\lambda) V_{\lambda} \varphi_{e\lambda} d\lambda.$$

В соответствии с этим визуальные коэффициенты отражения, пропускания и поглощения можно определить выражениями в такой форме:

$$\rho = \frac{\int \rho(\lambda) V_{\lambda} \Phi_{e\lambda} d\lambda}{\int_{\lambda} V_{\lambda} \Phi_{e\lambda} d\lambda}, \quad (4.35)$$

$$\tau = \frac{\int \tau(\lambda) V_{\lambda} \Phi_{e\lambda} d\lambda}{\int_{\lambda} V_{\lambda} \Phi_{e\lambda} d\lambda}, \quad (4.36)$$

$$\alpha = \frac{\int \alpha(\lambda) V_{\lambda} \Phi_{e\lambda} d\lambda}{\int_{\lambda} V_{\lambda} \Phi_{e\lambda} d\lambda}, \quad (4.37)$$

где все интегралы берутся в пределах видимого спектра.

Если в выражениях (4.35), (4.36) и (4.37) формально положить множитель  $V_{\lambda} \equiv 1$ , то они примут вид выражений, определяющих энергетические коэффициенты отражения  $\rho_e$ , пропускания  $\tau_e$  и поглощения  $\alpha_e$ . Таким образом,

$$\rho_e = \frac{\int \rho(\lambda) \Phi_{e\lambda} d\lambda}{\int_{\lambda} \Phi_{e\lambda} d\lambda}, \quad (4.38)$$

$$\tau_e = \frac{\int \tau(\lambda) \Phi_{e\lambda} d\lambda}{\int_{\lambda} \Phi_{e\lambda} d\lambda}, \quad (4.39)$$

$$\alpha_e = \frac{\int \alpha(\lambda) \Phi_{e\lambda} d\lambda}{\int_{\lambda} \Phi_{e\lambda} d\lambda}, \quad (4.40)$$

где все интегралы распространены на весь спектр излучения источника.

Отсюда следует, что энергетические коэффициенты отражения, пропускания и поглощения характеризуют фотометрические свойства слоя для нейтрального приёмника. Действие всех известных нейтральных приёмников излучения основано на нагревании, возникающем при поглощении падающего



на них излучения. Поэтому все нейтральные приёмники имеют чёрную поверхность, причём хороший приёмник должен поглощать излучение в невидимых областях спектра такую же часть падающего на него излучения, как и в видимой области. Поверхность современного нейтрального приёмника имеет высокий и практически одинаковый коэффициент поглощения в спектральном диапазоне излучения от 0,3 мкм до 40 мкм.

В соответствии с выражениями (4.35)–(4.40) величина коэффициентов отражения, пропускания и поглощения зависит не только от спектральных свойств материалов, определяемых функциями  $\rho(\lambda)$ ,  $\tau(\lambda)$  и  $\alpha(\lambda)$ , но также от вида функции  $\varphi_{e\lambda}$ . Влияние спектральной чувствительности глаза на коэффициенты  $\rho$ ,  $\tau$  и  $\alpha$  подобно влиянию спектрального состава падающего излучения, при этом изменение спектральной чувствительности глаза, наступающие, например, при приходе к сумеречному зрению, влечёт за собой изменение величины этих коэффициентов. Только для нейтральных материалов, спектральные характеристики которых в пределах рассматриваемого интервала длин волн не зависят от длины волны, коэффициенты отражения, пропускания и поглощения не зависят ни от спектрального состава падающего излучения, ни от спектральной чувствительности глаза и совпадают с их значениями для любого монохроматического излучения.

#### 4.5.2. Полезные сведения из электромагнитной теории света

Уравнения Максвелла связывают между собой величины, характеризующие электромагнитное поле, с его источниками, т.е. с распределением в пространстве электрических зарядов  $\rho$  и токов  $\vec{j}$ , системой дифференциальных уравнений. Дифференциальные уравнения, которые должны удовлетворять каждый из векторов в отдельности, можно получить путём исключения остальных векторов. При этом в однородной среде в области

поля, не содержащей ни зарядов ( $\rho = 0$ ), ни токов ( $\vec{j} = 0$ ), дифференциальные уравнения имеют вид:

$$\nabla^2 \bar{E} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \ddot{\bar{E}} = 0. \quad (4.41)$$

$$\nabla^2 \bar{H} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \ddot{\bar{H}} = 0. \quad (4.42)$$

Здесь  $c$  – скорость света в вакууме; точка над буквой означает дифференцирование по времени. Уравнение вида (4.41) или (4.42) называется уравнением д’Аламбера или волновым уравнением. Эти уравнения волнового движения определяют существование электромагнитных волн, распространяющихся со скоростью  $V = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ .

В однородной среде в области, где отсутствуют заряды и токи, любой из декартовых компонентов  $A(\vec{r}, t)$  векторов поля  $\bar{E}$  или  $\bar{H}$  в соответствии с уравнениями (4.41) или (4.42) удовлетворяет однородному волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - V^2 \nabla^2 A = 0. \quad (4.43)$$

Пусть  $\vec{r}(x, y, z)$  – радиус-вектор некоторой точки  $P$ , а  $\vec{s}(s_x, s_y, s_z)$  – единичный вектор с фиксированным направлением. При этом любое решение уравнения (4.43) в виде  $A = A(\vec{r} \cdot \vec{s}, t)$  определяет плоскую волну, так как в каждый момент времени величина  $A$  постоянна в плоскостях  $\vec{r} \cdot \vec{s} = const$ , которые перпендикулярны к единичному вектору  $\vec{s}$ . В точке  $\vec{r}_0$  пространства возмущение, вызванное волной, зависит только от времени, т.е.  $A(\vec{r}_0, t) = f(t)$ . Важный частный случай электромагнитных волн представляют волны, в которых поле является простой периодической функцией времени. Такая волна называется монохроматической. Зависимость компонентов поля от времени в монохроматической волне определяется множителем вида  $\cos(\omega t + \delta)$ , где  $\omega$  –

угловая частота волны, а  $\delta$  – начальная фаза. При этом функцию  $f(t)$  можно представить в виде

$$f(t) = a \cos(\omega t + \delta). \quad (4.44)$$

Величина  $a$  ( $a > 0$ ) называется амплитудой, а аргумент косинуса  $(\omega t + \delta)$  – фазой. Величина  $\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{T}$  называется частотой колебаний и представляет собой число колебаний в секунду. При замене величины  $t$  на  $t + T$  значение функции  $f(t)$  остаётся неизменным. Поэтому величина  $T$  называется периодом колебаний. Волновые функции в форме (4.44) называют гармоническими функциями относительно времени.

Рассмотрим волновую функцию, которая определяет гармоническую плоскую волну, распространяющуюся в направлении, заданном единичным вектором  $\bar{s}$ . Для этого в выражении (4.44) заменим величину  $t$  величиной  $t - \frac{\bar{r} \cdot \bar{s}}{V}$ . При этом получаем

$$A(\bar{r}, t) = a \cos \left[ \omega \left( t - \frac{\bar{r} \cdot \bar{s}}{V} \right) + \delta \right]. \quad (4.45)$$

Расстояние, на которое перемещается поверхность волны за время  $T$ , равное одному периоду колебаний, определяет период изменения напряжённости поля в пространстве, равный  $\lambda = VT = V \frac{2\pi}{\omega}$ . Длина волны  $\lambda$  называется длиной волны, при этом приведённая длина волны  $\lambda_0 = cT = n\lambda$ . Эта длина волны соответствует распространяющейся в вакууме гармонической волне той же частоты. Легко убедиться, что величина  $A(\bar{r}, t)$ , определяемая выражением (4.45), не изменится, если величину  $\bar{r} \cdot \bar{s}$  заменить на  $\bar{r} \cdot \bar{s} + \lambda$ .

Выражение (4.45) можно представить в виде:

$$A(\bar{r}, t) = a \cos(\omega t - \bar{k} \cdot \bar{r} + \delta), \quad (4.46)$$

где  $\bar{k} = k\bar{s}$  называется волновым вектором или вектором распространения волны в среде, при этом волновое число  $k = \frac{\omega}{V} = \frac{2\pi}{\lambda} = n \frac{2\pi}{\lambda_0} = nk_0$ . Под  $A(\bar{r}, t)$  можно

понимать любую из проекций векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  на оси декартовой системы координат. Амплитуда  $a$  и начальная фаза  $\delta$  плоской монохроматической волны не зависят от  $\vec{r}$  и  $t$ , т.е. одинаковы во всём пространстве во все моменты времени, а, следовательно, выражение (4.46) определяет однородную волну. Никакие реальные волны этим свойством не обладают. Плоскую монохроматическую волну можно рассматривать как частный случай гармонических волн общего вида, определяемых уравнением

$$A(\vec{r}, t) = a(\vec{r})\cos[\omega t - g(\vec{r})], \quad (4.47)$$

где  $a > 0$  и  $g$  – вещественные скалярные функции положения. Поверхности  $g(\vec{r}) = const$  называют поверхностями постоянной фазы или волновыми поверхностями. В отличие от предыдущего случая поверхности постоянной амплитуды волны, определяемой уравнением (4.47), вообще говоря, не совпадают с поверхностями постоянной фазы. Говорят, что такое уравнение определяет неоднородную волну.

Расчёты, связанные с гармоническими волнами, упрощаются, если использовать экспоненциальные функции вместо тригонометрических. При этом уравнение (4.47) можно записать в виде

$$A(\vec{r}, t) = R_e \{U(\vec{r})\exp(-i\omega t)\}, \quad (4.48)$$

где  $U(\vec{r}) = a(\vec{r})\exp[ig(\vec{r})]$ , а символ  $R_e$  означает, что берётся вещественная часть.

Заметим, что изучение свойств плоской монохроматической волны важно потому, что любая электромагнитная волна может быть представлена в виде суперпозиции таких простых волн, поскольку сумма любых решений уравнений Максвелла является их решением. Кстати сказать, последнее утверждение в этом замечании позволяет от уравнения (4.48) перейти к уравнению вида:

$$A(\vec{r}, t) = U(\vec{r})\exp(-i\omega t). \quad (4.49)$$

Отсюда следует, что  $A(r, t) = U(\vec{r})\exp(-i\omega t)$ , а  $\nabla^2 A = \exp(-i\omega t)\nabla^2 U(\vec{r})$ . При этом уравнение (4.43) принимает вид:

$$\nabla^2 U + n^2 k_0^2 U = 0. \quad (4.50)$$

Полученное уравнение называют уравнением Гельмгольца. Величину  $U$  называют комплексной амплитудой волн. В частности, для плоской волны имеем

$$g(\vec{r}) = \omega \left( \frac{\vec{r} \cdot \vec{s}}{V} \right) - \delta = k(\vec{r} \cdot \vec{s}) - \delta = \vec{k} \cdot \vec{r} - \delta$$

при этом  $U(\vec{r}) = a \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r})$ , где  $a = a_0 \exp(-i\delta)$ .

### 4.5.3. Поляризация плоских монохроматических волн

Итак, решение уравнений Максвелла в форме (4.45) даёт бегущую плоскую монохроматическую волну. В бегущей плоской электромагнитной волне вектора  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  в каждой точке пространства и в каждый момент времени образуют с волновым вектором  $\vec{k}$  правую тройку векторов. В этом заключается свойство поперечности электромагнитных волн.

Направим ось  $z$  системы координат вдоль волнового вектора  $\vec{k}$ . Тогда у векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  могут быть отличны от нуля только проекции на оси  $x$  и  $y$ . Уравнения Максвелла допускают, в частности, такое решение, при котором у вектора  $\vec{E}$  во всех точках в пространстве и во все моменты времени отлична от нуля только одна проекция, например,  $E_x(z, t)$ . Вследствие свойства поперечности у вектора  $\vec{H}$  отлична от нуля только проекция на ось  $y$ , т.е.  $H_y(z, t)$ . Эти проекции связаны между собой соотношением  $\sqrt{\epsilon}E_x = \sqrt{\mu}H_y$ . Мгновенный "снимок" такой волны, показывающий векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  в разных точках оси  $z$  в один момент времени, показан на рис.4.7. В этом случае говорят, что волна имеет линейную, или плоскую, поляризацию. Плоскость, в которой лежит вектор напряжённости электрического поля волны  $\vec{E}$  и волновой вектор  $\vec{k}$ , называют плоскостью поляризации или плоскостью колебаний. Чтобы представить себе изменение электрического и магнитного полей с течением времени, можно считать, что вся система векторов, показанная на рис.4.7, движется как целое вдоль оси  $z$  со скоростью  $c$  (в вакууме).

Излучение обычных источников света не поляризовано. Свет, в котором представлены все направления колебаний вектора  $\vec{E}$  в плоскости, перпендикулярной направлению распространения, называется естественным светом. Линейно поляризованный свет получают, пропуская естественный через оптические поляризаторы. Действие этих устройств основано на различных физических принципах. С их помощью можно не только получить линейно поляризованный свет, но и выяснить, имеет ли исследуемое излучение линейную поляризацию. Выполняющее такую роль поляризационное устройство называют анализатором. Интенсивность пропускаемого через анализатор линейно поляризованного света при повороте анализатора изменяется от максимального значения, когда направление поляризации совпадает с направлением пропускания анализатора, и до нуля, когда эти направления перпендикулярны друг другу.

В отличие от обычных источников света излучение газового лазера, окна разрядной трубки которого наклонены на некоторый угол к её оптической оси (угол Брюстера), обладает линейной поляризацией.

В общем случае вектор  $\vec{E}$  может иметь любые направления в плоскости, перпендикулярной направлению распространения волны. Пусть наряду с волной, поляризованной в плоскости  $xOz$ , в том же направлении (в направлении  $z$ ) распространяется другая волна той же частоты  $\omega$ , но поляризованная в плоскости  $yOz$ . Вследствие линейности уравнений Максвелла такое наложение (или суперпозиция) волн также является решением уравнений. В зависимости от разности фаз складываемых линейно поляризованных волн результирующая волна может иметь различную поляризацию.

Рассмотрим электрическое поле  $\vec{E}(\vec{z}, t)$  волны, возникающей при сложении двух волн одинаковой частоты с ортогональными направлениями линейной поляризации:

$$E_x(z, t) = E_{0x} \exp[i(kz - \omega t)] = a \exp(-i\phi_1) \exp[i(kz - \omega t)], \quad (4.51)$$

$$E_y(z, t) = E_{0y} \exp[i(kz - \omega t)] = b \exp(-i\varphi_2) \exp[i(kz - \omega t)]. \quad (4.52)$$

При одинаковых (или отличающихся на  $n\pi$ , где  $n$  – целое число) фазах  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  комплексных амплитуд  $E_{0x}$  и  $E_{0y}$  в каждой точке происходит сложение взаимно перпендикулярных колебаний в одной фазе, что даёт колебание в новом направлении. Результирующая волна будет линейно поляризованной. Направление её поляризации зависит от отношения амплитуд  $a$  и  $b$ , как показано на рис.4.8.

Пусть волна, поляризованная в плоскости  $yOz$ , отстаёт по фазе на  $\frac{1}{2\pi}$  от волны, поляризованной в плоскости  $xOz$ , т.е.  $\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{1}{2\pi}$ . Если амплитуда этих волн одинаковы ( $a = b$ ), то вектор  $\vec{E}$  в любой точке  $z$  будет вращаться в плоскости  $xOy$  против часовой стрелки, оставаясь неизменным по модулю. Например, в точке  $z = 0$  имеем

$$E_x(t) = a \cos(\omega t + \varphi_1) \quad (4.53)$$

$$E_y(t) = a \cos\left(\omega t + \varphi_1 - \frac{1}{2}\pi\right) = a \sin(\omega t + \varphi_1). \quad (4.54)$$

Такую волну называют поляризованной по кругу или циркулярно поляризованной. Когда при наблюдении навстречу волне вращение вектора  $\vec{E}$  в фиксированной плоскости происходит как в рассмотренном примере при  $z = 0$ , т.е. против часовой стрелки, то говорят о волне левой круговой поляризации. Правая круговая поляризация соответствует вращению вектора в фиксированной плоскости  $z = const$  в направлении по часовой стрелке:

$$E_x(t) = a \cos(\omega t + \varphi_1) \quad (4.55)$$

$$E_y(t) = a \cos\left(\omega t + \varphi_1 + \frac{1}{2}\pi\right) = -a \sin(\omega t + \varphi_1), \quad (4.56)$$

т.е.  $E_y(t)$  опережает по фазе волну  $E_x(t)$  на  $\frac{1}{2}\pi$ .

На практике для превращения линейно поляризованного света в свет с круговой поляризацией используют анизотропные кристаллические пластинки,

в которых две волны с ортогональными направлениями линейной поляризации имеют различные фазовые скорости. Подбором толщины пластинки можно получить на выходе заданную разность фаз этих волн и тем самым требуемое состояние поляризации.

При использовании комплексной записи (4.51) и (4.52) для складываемых волн с ортогональными направлениями линейной поляризации результирующая волна имеет линейную поляризацию, если отношение комплексных амплитуд  $E_{0y}$  к  $E_{0x}$  выражается вещественным числом. Результирующая волна имеет круговую поляризацию, если отношение комплексных амплитуд определяется мнимым числом, по модулю равным единице. При  $\frac{E_{0y}}{E_{0x}} = \exp\left(i\frac{\pi}{2}\right) = i$  волна будет с правой круговой поляризацией, а при  $\frac{E_{0y}}{E_{0x}} = -i$  – с левой. В общем случае при наложении световых колебаний во взаимно перпендикулярных плоскостях кривая, которую описывает конец вектора  $\vec{E}$  в произвольной точке пространства, является геометрическим местом точек, координаты которых

$$E_x = a_1 \cos(\tau + \varphi_1) \quad (4.57)$$

$$E_y = a_2 \cos(\tau + \varphi_2) \quad (4.58)$$

$$E_z = 0. \quad (4.59)$$

Здесь  $\tau = kz - \omega t$ .

Для того, чтобы исключить  $\tau$  из первых двух уравнений (4.57) и (4.58), перепишем их в виде

$$\frac{E_x}{a_1} = \cos \tau \cos \varphi_1 - \sin \tau \sin \varphi_1 \quad (4.60)$$

$$\frac{E_y}{a_2} = \cos \tau \cos \varphi_2 - \sin \tau \sin \varphi_2. \quad (4.61)$$

При этом



$$\frac{E_x}{a_1} \sin \varphi_2 - \frac{E_y}{a_2} \sin \varphi_1 = \cos \tau \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \quad (4.62)$$

$$\frac{E_x}{a_1} \cos \varphi_2 - \frac{E_y}{a_2} \cos \varphi_1 = \sin \tau \sin(\varphi_2 - \varphi_1). \quad (4.63)$$

Возведя в квадрат левую и правую части этих уравнений и сложив полученные выражения соответствующих частей, имеем

$$\left(\frac{E_x}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{a_2}\right)^2 - 2\frac{E_x E_y}{a_1 a_2} \cos \varphi = \sin^2 \varphi, \quad (4.64)$$

где  $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ . Выражение (4.64) представляет собой уравнение конического сечения. Известно, что квадратичная форма  $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = H$  будет эллиптической, если дискриминант формы  $\delta = AC - B^2 > 0$ . В рассматриваемом случае соответствующий детерминант равен

$$\delta = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1^2} & -\frac{\cos \varphi}{a_1 a_2} \\ -\frac{\cos \varphi}{a_1 a_2} & \frac{1}{a_2^2} \end{vmatrix} = \frac{1}{a_1^2 a_2^2} (1 - \cos^2 \varphi) = \frac{\sin^2 \varphi}{a_1^2 a_2^2} \geq 0.$$

Таким образом, уравнение (4.64) описывает эллипс, вписываемый в прямоугольник, стороны которого параллельны осям координат  $x, y$  и имеют длины  $2a_1$  и  $2a_2$ , как показано на рис.4.9. Положив в уравнении (4.64) величину  $E_x = a_1$ , получаем  $E_y = a_2 \cos \varphi$ , а при  $E_y = a_2$ , получаем  $E_x = a_1 \cos \varphi$ , т.е. эллипс касается сторон прямоугольника в точках  $(\pm a_1; \pm a_2 \cos \varphi)$  и  $(\pm a_1 \cos \varphi; \pm a_2)$ . В этом случае говорят, что волна, описываемая уравнениями (4.57), (4.58) и (4.59), эллиптически поляризована. В общем случае оси эллипса непараллельны осям  $Ox$  и  $Oy$ .

Пусть  $O\mu$  и  $O\nu$  – новые оси, направленные по осям эллипса, а  $\psi$  ( $0 \leq \psi < \pi$ ) – угол между  $Ox$  и направлением главной оси  $O\mu$ , как показано на рис.4.10. При этом компоненты  $E_\mu$  и  $E_\nu$  связаны с  $E_x$  и  $E_y$  соотношениями

$$\left. \begin{aligned} E_{\mu} &= E_x \cos \psi + E_y \sin \psi \\ E_{\nu} &= -E_x \sin \psi + E_y \cos \psi \end{aligned} \right\}. \quad (4.65)$$

Если  $2a$  и  $2b$  ( $a \geq b$ ) – длины осей эллипса, то уравнение эллипса относительно осей  $0\mu$  и  $0\nu$  можно записать в виде:

$$\left. \begin{aligned} E_{\mu} &= a \cos(\tau + \varphi_0) \\ E_{\nu} &= \mp b \sin(\tau + \varphi_0) \end{aligned} \right\}. \quad (4.66)$$

Наличие двух знаков определяет возможность двух направлений вращения электрического (магнитного) вектора, конец которого описывает эллипс.

Чтобы определить амплитуды  $a$  и  $b$ , приравняем в развёрнутом виде правые части уравнений (4.65) и (4.66). При этом, учитывая выражения (4.60) и (4.61), получаем

$$\begin{aligned} a \cos \varphi_0 \cos \tau - a \sin \varphi_0 \sin \tau &= \cos \tau (a_1 \cos \varphi_1 \cos \psi + a_2 \cos \varphi_2 \sin \psi) - \\ &- \sin \tau (a_1 \sin \varphi_1 \cos \psi + a_2 \sin \varphi_2 \sin \psi); \\ \mp b \cos \varphi_0 \sin \tau \mp b \sin \varphi_0 \cos \tau &= \cos \tau (a_2 \cos \varphi_2 \cos \psi - a_1 \cos \varphi_1 \sin \psi) + \\ &+ \sin \tau (a_1 \sin \varphi_1 \sin \psi - a_2 \sin \varphi_2 \cos \psi). \end{aligned}$$

Приравнивая коэффициенты при  $\cos \tau$  и  $\sin \tau$ , получаем

$$\left. \begin{aligned} a \cos \varphi_0 &= a_1 \cos \varphi_1 \cos \psi + a_2 \cos \varphi_2 \sin \psi; \\ a \sin \varphi_0 &= a_1 \sin \varphi_1 \cos \psi + a_2 \sin \varphi_2 \sin \psi; \\ \mp b \cos \varphi_0 &= a_1 \sin \varphi_1 \sin \psi - a_2 \sin \varphi_2 \cos \psi; \\ \mp b \sin \varphi_0 &= -a_1 \cos \varphi_1 \sin \psi + a_2 \cos \varphi_2 \cos \psi \end{aligned} \right\}. \quad (4.67)$$

Возведя, левые и правые части этих уравнений в квадрат и последовательно складывая полученные части первых и последующих двух уравнений, находим, что

$$\begin{aligned} a^2 &= a_1^2 \cos^2 \psi + a_2^2 \sin^2 \psi + a_1 a_2 \sin 2\psi \cos \varphi; \\ b^2 &= a_1^2 \sin^2 \psi + a_2^2 \cos^2 \psi - a_1 a_2 \sin 2\psi \cos \varphi, \end{aligned}$$

где  $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ .

Отсюда следует, что

$$a^2 + b^2 = a_1^2 + a_2^2. \quad (4.68)$$

Используя выражения (4.67), легко показать, что

$$\pm (ab \cos^2 \varphi_0 + ab \sin^2 \varphi_0) = \pm ab = a_1 a_2 \sin \varphi. \quad (4.69)$$

Кроме того,

$$\mp \frac{b}{a} = \frac{a_1 \sin \varphi_1 \sin \psi - a_2 \sin \varphi_2 \cos \psi}{a_1 \cos \varphi_1 \cos \psi + a_2 \cos \varphi_2 \sin \psi} = \frac{-a_1 \cos \varphi_1 \sin \psi + a_2 \cos \varphi_2 \cos \psi}{a_1 \sin \varphi_1 \cos \psi + a_2 \sin \varphi_2 \sin \psi}.$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned} & a_1^2 \sin^2 \varphi_1 \sin \psi \cos \psi - a_1 a_2 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos^2 \psi + a_1 a_2 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \sin^2 \psi - \\ & - a_2^2 \sin^2 \varphi_2 \sin \psi \cos \psi = \\ & = -a_1^2 \cos^2 \varphi_1 \sin \psi \cos \psi + a_1 a_2 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos^2 \psi - a_1 a_2 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \sin^2 \psi + \\ & + a_2^2 \cos^2 \varphi_2 \sin \psi \cos \psi. \end{aligned}$$

Преобразовав это выражение, получаем

$$(a_1^2 - a_2^2) \sin 2\psi = 2a_1 a_2 \cos \varphi \cos 2\psi.$$

Отсюда следует, что

$$\operatorname{tg} 2\psi = \frac{2a_1 a_2}{a_1^2 - a_2^2} \cos \varphi. \quad (4.70)$$

Обозначим  $\frac{a_2}{a_1} = \operatorname{tg} \alpha$ , где  $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ .

При этом уравнение (4.70) можно представить в виде:

$$\operatorname{tg} 2\psi = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} \cos \varphi = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} \cos \varphi$$

или

$$\operatorname{tg} 2\psi = \operatorname{tg} 2\alpha \cos \varphi. \quad (4.71)$$

Из выражений (4.68) (4.69) следует, что

$$\pm \frac{2ab}{a^2 + b^2} = \frac{2a_1 a_2}{a_1^2 + a_2^2} \sin \varphi = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \sin \varphi = 2 \sin \alpha \cos \alpha \sin \varphi$$

или

$$\pm \frac{2ab}{a^2 + b^2} = \sin 2\alpha \sin \varphi. \quad (4.72)$$

Обозначим  $\pm \frac{b}{a} = \operatorname{tg} \chi$ ,

где  $\chi \left( -\frac{\pi}{4} \leq \chi \leq \frac{\pi}{4} \right)$  – вспомогательный угол, определяющий форму и ориентацию эллипса колебаний. При этом выражение (4.62) можно переписать в виде:

$$\sin 2\chi = \sin 2\alpha \sin \varphi. \quad (4.73)$$

Итак, если заданы величины  $a_1$  и  $a_2$  и разность фаз  $\varphi$ , относящиеся к произвольному положению осей, и если  $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ , то главные полуоси эллипса  $a$  и  $b$  и угол  $\psi$  ( $0 \leq \psi < \pi$ ), который большая ось образует с осью  $Ox$ , определяются формулами

$$a^2 + b^2 = a_1^2 + a_2^2; \quad (4.74a)$$

$$\operatorname{tg} 2\psi = \operatorname{tg} 2\alpha \cos \varphi; \quad (4.74б)$$

$$\sin 2\chi = \sin 2\alpha \sin \varphi. \quad (4.74в)$$

С другой стороны, если известны длины осей  $a$  и  $b$  и ориентация эллипса (т.е. заданы  $a$ ,  $b$  и  $\psi$ ), то эти формулы позволяют найти амплитуды  $a_1$  и  $a_2$  и разность фаз  $\varphi$ . Существуют оптические устройства, которые позволяют определять эти величины прямым способом.

В предельных случаях эллипс поляризации вырождается либо в прямую, либо в окружность. Согласно (4.64) эллипс вырождается в прямую при  $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = m\pi$ , где  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . При этом  $\frac{E_y}{E_x} = (-1)^m \frac{a_2}{a_1}$ . В этом случае имеем линейно поляризованную волну. В том случае, когда эллипс вырождается в окружность, имеем круговую поляризацию волны. Вполне очевидно, что условием этого является преобразование описанного прямоугольника в квадрат, что эквивалентно выравниванию амплитуд:  $a_1 = a_2 = a$ . Кроме того, при этом один из компонентов вектора  $\vec{E}$  должен равняться нулю, когда другой достигает максимального значения. Последнее условие эквивалентно равенству:

$$\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \pm(2m-1)\frac{\pi}{2}, \text{ где } m = 1, 2, 3, \dots$$

При соблюдении названных условий уравнение (4.64) принимает вид уравнения окружности:

$$E_x^2 + E_y^2 = a^2.$$

В случае правой поляризации  $\sin \varphi > 0$ . При этом

$$\varphi = \frac{\pi}{2} + 2m\pi, \text{ где } m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots;$$

$$E_x = a \cos(\tau + \varphi_1),$$

$$E_y = a \cos\left(\tau + \varphi_1 + \frac{\pi}{2} + 2m\pi\right) = -a \sin(\tau + a_1).$$

Для левой поляризации  $\sin \varphi < 0$ . При этом

$$\varphi = -\frac{\pi}{2} + 2m\pi, \text{ где } m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots;$$

$$E_x = a \cos(\tau + \varphi_1),$$

$$E_y = a \cos\left(\tau + \varphi_1 + \frac{\pi}{2} + 2m\pi\right) = a \sin(\tau + a_1).$$

Если вместо вещественного представления компонентов вектора  $\vec{E}$  использовать комплексное:

$$E_x = a_1 \exp[i(\tau + \varphi_1)],$$

$$E_y = a_2 \exp[i(\tau + \varphi_2)],$$

то

$$\frac{E_y}{E_x} = \frac{a_2}{a_1} \exp[i(\tau + \varphi_2 - \tau - \varphi_1)] = \frac{a_2}{a_1} \exp(i\varphi)$$

или

$$\frac{E_y}{E_x} = \frac{a_2}{a_1} e^{i\varphi}.$$

Значение этого отношения позволяет сразу же определить характер поляризации:

– линейная поляризация электрической волны, если  $\varphi = \pm m\pi$ , где  $m = 1, 2, 3, \dots$ ; при этом

$$\frac{E_y}{E_x} = (-1)^m \frac{a_2}{a_1};$$

– правая круговая поляризация электрической волны, если  $a_1 = a_2$ ,  $\varphi = \frac{\pi}{2} + 2m\pi$ , где  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ; при этом

$$\frac{E_y}{E_x} = \exp\left[i\left(\frac{\pi}{2} + 2m\pi\right)\right] = \exp\left(i\frac{\pi}{2}\right) = i;$$

– левая круговая поляризация электрической волны, если  $a_1 = a_2$ ,  $\varphi = -\frac{\pi}{2} + 2m\pi$ , где  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ; при этом

$$\frac{E_y}{E_x} = \exp\left[i\left(-\frac{\pi}{2} + 2m\pi\right)\right] = \exp\left(-i\frac{\pi}{2}\right) = -i.$$

Можно показать, что в общем случае для правой эллиптической поляризации мнимая часть отношения  $\frac{E_y}{E_x}$  положительна, тогда как для левой эллиптической поляризации она отрицательна.

На рис.4.10 показаны эллипсы поляризации при разных значениях  $\varphi$ .

Характеристика состояния поляризации с помощью параметров Стокса.

Для характеристики эллипса поляризации необходимы три независимые величины, к которым из уже рассмотренных можно отнести амплитуды  $a_1$  и  $a_2$  и разность фаз  $\varphi$  или малую и большую полуоси эллипса  $a$  и  $b$  и угол  $\psi$ , характеризующий ориентацию эллипса. Для практических целей состояние поляризации удобно характеризовать параметрами, обладающими одинаковой физической размерностью. Такие параметры были введены Стоксом в 1852 году при его исследованиях частично поляризованного света. Параметрами

Стокса для плоской монохроматической волны служат следующие четыре величины:

$$s_0 = a_1^2 + a_2^2, \quad (4.75a)$$

$$s_1 = a_1^2 - a_2^2, \quad (4.75б)$$

$$s_2 = 2a_1a_2 \cos \varphi, \quad (4.75в)$$

$$s_3 = 2a_1a_2 \sin \varphi. \quad (4.75г)$$

Лишь три из них независимы, так как справедливо тождество

$$s_0^2 = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2. \quad (4.76)$$

Из выражения (4.75а) следует, что параметр  $s_0$  пропорционален интенсивности волны.

Напомним, что  $\frac{a_2}{a_1} = \operatorname{tg} \alpha$ . Из соотношения (4.75а) имеем

$$s_0 = a_1^2 \left( 1 + \frac{a_2^2}{a_1^2} \right) = a_1^2 (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) = \frac{a_1^2}{\cos^2 \alpha}.$$

Полученное соотношение позволяет выражение (4.74в) преобразовать к виду:

$$\sin 2\chi = 2 \cos^2 \alpha \operatorname{tg} \alpha \sin \varphi = 2 \cos^2 \alpha \frac{a_1 a_2}{a_1^2} \sin \varphi = \frac{2 a_1 a_2 \sin \varphi}{s_0}.$$

Учитывая при этом выражение (4.75г), получаем

$$s_3 = s_0 \sin 2\chi. \quad (4.77)$$

В результате подстановки соотношений (4.75б) и (4.75в) в выражение (4.70) имеем

$$s_2 = s_1 \operatorname{tg} 2\psi. \quad (4.78)$$

Подставим соотношения (4.77) и (4.78) в выражение (4.76):

$$s_0^2 = s_1^2 + s_1^2 \operatorname{tg}^2 2\psi + s_0^2 \sin^2 2\chi.$$

Отсюда следует, что

$$s_1 = s_0 \cos 2\chi \cos 2\psi. \quad (4.79)$$

При этом выражение (4.78) принимает вид:

$$s_2 = s_0 \cos 2\chi \sin 2\psi .$$

Таким образом, параметры  $s_1, s_2$  и  $s_3$  достаточно простыми соотношениями связаны с углом  $\chi \left( -\frac{\pi}{4} \leq \chi \leq \frac{\pi}{4} \right)$ , характеризующим эллиптичность и направление вращения, и с углом  $\psi$  ( $0 \leq \psi < \pi$ ), характеризующим ориентацию эллипса. Полученные соотношения, определяющие параметры  $s_1, s_2$  и  $s_3$ , удобно свести всех вместе:

$$s_1 = s_0 \cos 2\chi \cos 2\psi , \quad (4.80a)$$

$$s_2 = s_0 \cos 2\chi \sin 2\psi , \quad (4.80б)$$

$$s_3 = s_0 \sin 2\chi . \quad (4.80в)$$

Полученные выражения (4.80) определяют возможность простого геометрического представления различных состояний поляризации: параметры Стокса  $s_1, s_2$  и  $s_3$  можно рассматривать как декартовы координаты точки  $P$  на сфере  $\Sigma$  радиуса  $s_0$ , причём  $2\chi$  и  $2\psi$  являются сферическими угловыми координатами этой точки, как показано на рис.4.11. Таким образом, каждому возможному состоянию поляризации плоской монохроматической волны заданной интенсивности ( $s_0 = const$ ) соответствует одна точка на сфере  $\Sigma$  и наоборот. Так как знак угла  $\chi$  определяет направление вращения, то, как следует из выражения (4.80в), правая поляризация представляется точками на поверхности  $\Sigma$ , лежащими выше экваториальной плоскости (плоскости  $xy$ ), а левая поляризация – точками на  $\Sigma$ , лежащими ниже этой плоскости.

Для линейно поляризованного света разность фаз  $\phi$  равна нулю или числу, кратному  $\pi$ . В соответствии с выражением (4.80в) параметр Стокса  $s_3$  равен нулю, если  $\chi = m\pi$ , где  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Таким образом, линейная поляризация представляется точками окружности в экваториальной плоскости. Для круговой поляризации  $a_1 = a_2$  и при правой поляризации угол  $\phi = \frac{\pi}{2}$ , а при левой поляризации угол  $\phi = -\frac{\pi}{2}$ . При этом в соответствии с соотношением (4.74в)



$\sin 2\chi = \pm 1$ . Следовательно, правая круговая поляризация представляется северным полюсом ( $s_1 = s_2 = 0, s_3 = s_0$ ), а левая круговая поляризация – южным полюсом ( $s_1 = s_2 = 0, s_3 = -s_0$ ).

Такое геометрическое представление различных состояний поляризации точками на сфере было предложено Пуанкаре. Оно чрезвычайно полезно в кристаллооптике для определения влияния кристаллических сред на состояние поляризации проходящего через них света. Сфера  $\Sigma$  называется сферой Пуанкаре.

Итак, строго монохроматический свет всегда поляризован, т.е. конец электрического (или магнитного) вектора в каждой точке пространства движется периодически, описывая эллипс, который в особых случаях переходит в круг или прямую линию. В том случае, когда конец вектора движется совершенно нерегулярно и такие световые колебания не имеют никаких преимущественных направлений в плоскости, перпендикулярной к направлению распространения, свет называется неполяризованным. Эти два случая относятся к экстремальным. В общем случае изменение векторов поля не является ни вполне регулярным, ни вполне нерегулярным, при этом можно сказать, что свет частично поляризован. Обычно такой свет получается из неполяризованного при отражении или рассеянии.

Рассмотрим квазимонохроматическую световую волну со средней частотой  $\bar{\nu}$ , распространяющуюся в положительном направлении от  $z$ . Пусть  $E_x(t)$  и  $E_y(t)$  – два взаимно ортогональных компонента электрического вектора в некоторой точке  $O$ , перпендикулярные к направлению распространения, при этом

$$\left. \begin{aligned} E_x(t) &= a_1(t) \exp\{i[\varphi_1(t) - 2\pi\bar{\nu}t]\}, \\ E_y(t) &= a_2(t) \exp\{i[\varphi_2(t) - 2\pi\bar{\nu}t]\}. \end{aligned} \right\} \quad (4.81)$$

Если бы свет был монохроматическим, то амплитуды  $a_1$  и  $a_2$  и начальные фазы  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  были бы постоянными. Для квазимонохроматической волны эти величины зависят также от времени. Однако, за любой интервал времени,

малый по сравнению с временем когерентности, т.е. малый по сравнению с величиной, обратной эффективной спектральной ширине света  $\Delta\nu$ , их изменение относительно невелико.

Предположим, что запаздывание компонента  $E_y$  относительно компонента  $E_x$  равно  $\varepsilon$ , что можно осуществить, например, с помощью одного из оптических компонентов, и рассмотрим интенсивность  $I(\theta, \varepsilon)$  световых колебаний в направлении, которое образует угол  $\theta$  с положительным направлением оси  $x$ . Такие колебания можно выделить, пропуская свет через соответствующим образом ориентированный поляризатор.

Компонент электрического вектора в рассматриваемом направлении после введения запаздывания  $\varepsilon$  можно определить выражением вида:

$$E(t; \theta, \varepsilon) = E_x \cos \theta + E_y \exp(i\varepsilon) \sin \theta. \quad (4.82)$$

При этом

$$\begin{aligned} I(\theta, \varepsilon) &= \langle E(t; \theta, \varepsilon) E^*(t; \theta, \varepsilon) \rangle = \\ &= J_{xx} \cos^2 \theta + J_{yy} \sin^2 \theta + J_{xy} \exp(-i\varepsilon) \cos \theta \sin \theta + J_{yx} \exp(i\varepsilon) \sin \theta \cos \theta, \end{aligned} \quad (4.83)$$

где  $J_{xx}, J_{xy}, \dots$  – элементы матрицы

$$J = \begin{pmatrix} \langle E_x E_x^* \rangle & \langle E_x E_y^* \rangle \\ \langle E_y E_x^* \rangle & \langle E_y E_y^* \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle a_1^2 \rangle & \langle a_1 a_2 \exp(-i\varphi) \rangle \\ \langle a_1 a_2 \exp(i\varphi) \rangle & \langle a_2^2 \rangle \end{pmatrix}. \quad (4.84)$$

Здесь  $\varphi = \varphi_2(t) - \varphi_1(t)$ , а скобки  $\langle \rangle$  означают, усреднение по времени.

Матрица когерентности квазимонохроматической волны  $J$  представляет собой эрмитову матрицу, диагональные элементы которой вещественны и представляют собой интенсивности  $E_x$  и  $E_y$  компонентов электрического вектора, а недиагональные элементы – в общем случае комплексны. Напомним, что матрица называется эрмитовой, если  $J_{ij} = J_{ji}^*$  при всех  $i$  и  $j$ . Элементы матрицы когерентности заданной волны можно определить с помощью относительно простых экспериментов, суть которых состоит в измерении интенсивности для ряда значений  $\theta$  (ориентации поляризатора) и  $\varepsilon$

(запаздывания, обусловленного применяемым компенсатором) и последующем решении соответствующих уравнений, полученных из выражения (4.83). Пусть  $\{\theta, \varepsilon\}$  обозначает результаты измерений, соответствующие определённой паре значений  $\theta, \varepsilon$ . Удобно использовать следующие их значения:

$$\{0^\circ, 0\}, \{45^\circ, 0\}, \{90^\circ, 0\}, \{135^\circ, 0\}, \left\{45^\circ, \frac{\pi}{2}\right\}, \left\{135^\circ, \frac{\pi}{2}\right\}.$$

Из выражения (4.83) следует, что элементы матрицы когерентности выражаются через интенсивности, полученные в результате измерений при шести приведённых значения пар  $\theta, \varepsilon$  в виде:

$$\left. \begin{aligned} J_{xx} &= I(0^\circ, 0), \\ J_{yy} &= I(90^\circ, 0), \\ J_{xy} &= \frac{1}{2} [I(45^\circ, 0) - I(135^\circ, 0)] + \frac{1}{2} i \left[ I\left(45^\circ, \frac{\pi}{2}\right) - I\left(135^\circ, \frac{\pi}{2}\right) \right], \\ J_{yx} &= \frac{1}{2} [I(45^\circ, 0) - I(135^\circ, 0)] - \frac{1}{2} i \left[ I\left(45^\circ, \frac{\pi}{2}\right) - I\left(135^\circ, \frac{\pi}{2}\right) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (4.85)$$

Из равенств (4.85) видим, что для определения  $J_{xx}, J_{xy}$  и вещественной части  $J_{xy}$  (или  $J_{yx}$ ) необходим лишь поляризатор. Для определения мнимой части  $J_{xy}$  (или  $J_{yx}$ ) требуется также согласно двум последним соотношениям (4.85) компенсатор, который вносил бы разность фаз в четверть периода между компонентами  $E_x$  и  $E_y$  электрического вектора. В качестве такого компенсатора можно применить, например, четвертьволновую пластинку.

Итак, для характеристики квазимонохроматической плоской волны, вообще говоря, необходимы четыре вещественные величины, например,  $J_{xx}, J_{xy}$ , вещественная и мнимая части  $J_{xy}$  (или  $J_{yx}$ ). В своих исследованиях частично поляризованного света Стокс ввёл несколько отличное представление с четырьмя параметрами, тесно связанными с рассмотренными. Параметрами Стокса общего вида являются следующие четыре величины:

$$\left. \begin{aligned} s_0 &= \langle a_1^2 \rangle + \langle a_2^2 \rangle, \\ s_1 &= \langle a_1^2 \rangle - \langle a_2^2 \rangle, \\ s_2 &= 2\langle a_1 a_2 \cos \varphi \rangle, \\ s_3 &= 2\langle a_1 a_2 \sin \varphi \rangle, \end{aligned} \right\} \quad (4.86)$$

где, как и прежде,  $a_1$  и  $a_2$  – мгновенные значения амплитуд двух взаимно перпендикулярных компонентов  $E_x$  и  $E_y$  электрического вектора, а  $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$  – разность их фаз. Для монохроматического света амплитуды  $a_1$  и  $a_2$  и разность фаз  $\varphi$  не зависят от времени и выражения (4.86) становятся выражениями (4.85).

Из выражений (4.86) и (4.84) следует, что параметры Стокса и элементы матрицы когерентности связаны соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} s_0 &= J_{xx} + J_{yy}, \\ s_1 &= J_{xx} - J_{yy}, \\ s_2 &= J_{xy} + J_{yx}, \\ s_3 &= i(J_{xy} - J_{yx}); \end{aligned} \right\} \quad (4.87a)$$

$$\left. \begin{aligned} J_{xx} &= \frac{1}{2}(s_0 + s_1), \\ J_{yy} &= \frac{1}{2}(s_0 - s_1), \\ J_{xy} &= \frac{1}{2}(s_2 - is_3), \\ J_{yx} &= \frac{1}{2}(s_2 + is_3). \end{aligned} \right\} \quad (4.87b)$$

Применив соотношения (4.85) и (4.87a), получаем

$$\left. \begin{aligned} s_0 &= I(0^\circ, 0) + I(90^\circ, 0), \\ s_1 &= I(0^\circ, 0) - I(90^\circ, 0), \\ s_2 &= I(45^\circ, 0) - I(135^\circ, 0), \\ s_3 &= I\left(135^\circ, \frac{\pi}{2}\right) - I\left(45^\circ, \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned} \right\} \quad (4.88)$$

Из этих соотношений видно, что параметр  $s_0$  представляет собой полную интенсивность. Параметр  $s_1$  равен разности интенсивностей линейно поляризованного света, прошедшего через поляризаторы, с азимутами  $\theta = 0^\circ$  и  $\theta = 90^\circ$ . Так же интерпретируется и параметр  $s_2$ , но для азимутов  $\theta = 45^\circ$  и  $\theta = 135^\circ$ . И, наконец, параметр  $s_3$  равен разности интенсивностей света, прошедшего через прибор, пропускающий колебания с правой круговой поляризацией, и света, прошедшего через прибор, пропускающий колебания с левой круговой поляризацией.

Используя соотношения (4.87а), легко убедиться, что при соблюдении условия  $s_0^2 = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2$  справедливо равенство  $J_{xx}J_{yy} = J_{xy}J_{yx}$ , т.е. для монохроматической плоской волны  $J_{xx}J_{yy} - J_{xy}J_{yx} = 0$ . Для неполяризованной волны (естественный свет) справедливо соотношение  $s_1 = s_2 = s_3 = 0$ . Однако, при этом  $s_0 > 0$ . Таким образом, в общем случае имеем

$$s_0^2 \geq s_1^2 + s_2^2 + s_3^2.$$

Можно показать, что любую квазимонохроматическую световую волну можно рассматривать как сумму полностью неполяризованной и полностью поляризованной волн, не зависящих друг от друга, и что такое представление единственно. Обозначим четыре параметра Стокса  $s_0, s_1, s_2, s_3$  одним символом  $s$ . Тогда, очевидно, для волны, характеризующейся параметром  $s$ , требуемое представление запишется в виде

$$s = s^{(1)} + s^{(2)}, \quad (4.89)$$

$$\text{где } s^{(1)} = \sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2}, s_1, s_2, s_3, \quad (4.89а)$$

$$\text{а } s^{(2)} = s_0 - \sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2}, 0, 0, 0. \quad (4.89б)$$

Параметр  $s^{(1)}$  соответствует поляризованной, а  $s^{(2)}$  – неполяризованной части волны. Следовательно, с помощью параметров Стокса степень поляризации исследуемой волны можно определить отношением

$$P = \frac{I_{\text{поляризованная}}}{I_{\text{полная}}} = \frac{\sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2}}{s_0}. \quad (4.90)$$

При этом форма и ориентация эллипса поляризации, связанного с поляризованной частью волны, в соответствии с соотношениями (4.77) и (4.89а), определяется выражением

$$\sin 2\chi = \frac{s_3}{\sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2}}, \quad (4.91)$$

где  $-\frac{1}{4}\pi < \chi \leq \frac{\pi}{4}$ . Угол  $\psi$  ( $0 \leq \psi < \pi$ ) между большой осью эллипса и осью  $Ox$  определяется в соответствии с выражениями (4.78) и (4.89а) соотношением

$$\operatorname{tg} 2\psi = \frac{s_2}{s_1}.$$

Итак, параметры Стокса, как и матрица когерентности, служат полезным инструментом для систематического анализа состояния поляризации квазимонохроматической волны.

#### 4.5.4. Отражение и преломление плоской волны на границе раздела двух однородных изотропных сред

Полное электромагнитное поле, включающее падающую, отражённую и преломлённую волны, должно удовлетворять определённым граничным условиям, которые могут быть получены предельным переходом из уравнений Максвелла. Уравнения электромагнитного поля можно применить к каждой среде с учётом значений электрических и магнитных параметров, характеризующих эту среду.

Любая оптическая система представляет собой систему поверхностей раздела двух сред с различными свойствами, характеризуемыми величинами  $\epsilon$  и  $\mu$ . Полная теория должна быть в состоянии описывать явления, происходящие на границе раздела двух сред. Математически это означает, что необходимо иметь систему граничных условий, которые связывали бы на границе раздела двух сред два решения уравнений электромагнитного поля,

каждое из которых справедливо в отдельности по одну сторону от границы раздела. Выведем соотношения, описывающие переход электромагнитного поля через такую поверхность раздела.

### Граничные условия на поверхностях раздела

Заменим поверхность раздела сред  $T$  тонким переходным слоем, внутри которого  $\varepsilon$  и  $\mu$  быстро, но непрерывно меняются от значений, характеризующих среду стороны поверхности, до их значений с другой её стороны. Внутри этого слоя построим цилиндр, ограниченный с боков частокотом нормалей к поверхности  $T$  в пределах малых площадок  $\delta S_1$  и  $\delta S_2$ , параллельных поверхности  $T$  и служащих основаниями цилиндра с каждой её стороны, как показано на рис.4.12. Поскольку во всём цилиндре вектор  $\vec{B}$  и его производные непрерывны, мы можем применить теорему Остроградского-Гаусса к интервалу от  $\text{div}\vec{B}$ , взятому по объёму цилиндра. Тогда согласно уравнению (4.4) получим

$$\int_V \text{div}\vec{B}dV = \int_S \vec{B} \cdot \vec{n}dS = 0. \quad (4.92)$$

Здесь  $\vec{n}$  – единичный вектор внешней нормали. Заметим, что второй интеграл берётся по всей поверхности цилиндра. Так как площадки  $dS_1$  и  $dS_2$  предполагаются малыми, можно считать, что на них вектор  $\vec{B}$  принимает постоянные значения  $\vec{B}_1$  и  $\vec{B}_2$ . Тогда выражение (4.92) можно заменить следующим:

$$\vec{B}_1 \cdot \vec{n}_1 \delta S_1 + \vec{B}_2 \cdot \vec{n}_2 \delta S_2 + \text{вклад от стенок} = 0. \quad (4.93)$$

Если высота цилиндра  $dh$  стремится к нулю, то необходимый слой переходит в поверхность, в вклад от стенок цилиндра исчезает при условии, что отсутствует поверхностный поток магнитной индукции. Такой поток никогда не наблюдается и, следовательно, в пределе

$$(\vec{B}_1 \cdot \vec{n}_1 + \vec{B}_2 \cdot \vec{n}_2) \delta S = 0, \quad (4.94)$$

где  $\delta S$  – площадь пересечения рассматриваемого цилиндра с поверхностью  $T$ .

Если  $\bar{n}_{12}$  – единичный вектор нормали, направленный из первой среды во вторую, то  $\bar{n}_{12} = -\bar{n}_1 = \bar{n}_2$ . При этом из соотношения (4.94) следует, что

$$\bar{n}_{12}(\bar{B}_2 - \bar{B}_1) = 0, \quad (4.95)$$

т.е. нормальная составляющая вектора магнитной индукции непрерывна на поверхности раздела.

Подобным образом можно рассмотреть электрическое смещение  $\bar{D}$ , но в этом случае при наличии зарядов появится дополнительный член. Аналогично выражению (4.92) из соотношения (4.3) следует

$$\int_V \operatorname{div} \bar{D} dV = \int_S \bar{D} \cdot \bar{n} dS = 4\pi \int_V \rho dV. \quad (4.96)$$

При слиянии площадок  $\delta S_1$  и  $\delta S_2$  объёмная плотность зарядов  $\rho$  переходит в поверхностную плотность заряда  $\tilde{\rho}$ , определяемую соотношением

$$\lim_{\delta h \rightarrow 0} \int_V \rho dV = \int_S \tilde{\rho} dS.$$

Аналогично объёмная плотность тока  $\bar{j}$  переходит в поверхностную плотность тока  $\tilde{j}$ :

$$\lim_{\delta h \rightarrow 0} \int_V \bar{j} dV = \int_S \tilde{j} dS.$$

Если площадку  $\delta S$  и высоту  $\delta h$  выбрать достаточно малыми, то из выражения (4.96) получаем

$$\bar{D}_1 \cdot \bar{n}_1 \delta S_1 + \bar{D}_2 \cdot \bar{n}_2 \delta S_2 + \text{вклад от стенок} = 4\pi \tilde{\rho} \delta S.$$

Вклад от стенок стремится к нулю с уменьшением  $\delta h$  и поэтому в пределе при  $\delta h \rightarrow 0$  получаем

$$\bar{n}_{12}(\bar{D}_2 - \bar{D}_1) = 4\pi \tilde{\rho}, \quad (4.97)$$

т.е. при наличии на поверхности раздела слоя с поверхностной плотностью заряда  $\tilde{\rho}$  нормальная составляющая вектора электрического смещения при переходе через эту поверхность испытывает скачок, равный  $4\pi \tilde{\rho}$ .

Исследуем теперь поведение тангенциальных составляющих векторов  $\bar{E}$  и  $\bar{H}$ . Заменим поверхность резкого раздела сред переходным слоем, а цилиндр,



показанный на рис.4.12, прямоугольной площадкой, стороны которой параллельны и перпендикулярны поверхности  $T$ , как показано на рис.4.13. Пусть  $\bar{\tau}$  – единичный вектор, перпендикулярный плоскости рассматриваемого прямоугольника. Используя теорему Стокса, из уравнения (4.2) получаем

$$\int_S \text{rot} \bar{E} \cdot \bar{\tau} dS = \int_L \bar{E} \cdot d\bar{r} = -\frac{1}{c} \int_S \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \bar{\tau} dS. \quad (4.98)$$

Здесь первый и третий интегралы берутся по площади прямоугольника, а второй – вдоль его границ. Если длины  $P_1Q_1 = \delta l_1$  и  $P_2Q_2 = \delta l_2$  малы, то на каждой из этих сторон вектор  $\bar{E}$  можно заменить постоянными векторами  $\bar{E}_1$  и  $\bar{E}_2$ . Подобным же образом постоянным значением можно заменить и вектор  $\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}$ . При этом из уравнения (4.108) в соответствии с рис.4.13 находим

$$\bar{E}_1 \cdot \bar{t}_1 \delta l_1 + \bar{E}_2 \cdot \bar{t}_2 \delta l_2 + \text{вклад от концов} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \bar{\tau} \delta l \delta h, \quad (4.99)$$

где  $\delta l$  – линейный элемент, по которому прямоугольник пересекается с поверхностью раздела. Если теперь постепенно уменьшать высоту прямоугольника, то вклад от концов  $P_1P_2$  и  $Q_1Q_2$  будет стремиться к нулю.

Полагая, что вектор  $\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}$  остаётся конечным, в пределе при  $\delta h \rightarrow 0$  получим

$$(\bar{E}_1 \bar{t}_1 + \bar{E}_2 \bar{t}_2) \delta l = 0. \quad (4.100)$$

Если  $\bar{t}$  – единичный вектор касательной к поверхности раздела в плоскости прямоугольника, то

$$\bar{t}_1 = -\bar{t} = -\bar{\tau} \times \bar{n}_{12}, \quad \bar{t}_2 = \bar{t} = \bar{\tau} \times \bar{n}_{12}.$$

При этом из выражения (4.100) следует

$$\bar{\tau} [\bar{n}_{12} \times (\bar{E}_2 - \bar{E}_1)] = 0.$$

Так как ориентации прямоугольника, а, следовательно, и единичного вектора  $\bar{\tau}$ , произвольна, то

$$\bar{n}_{12} \times (\bar{E}_2 - \bar{E}_1) = 0, \quad (4.101)$$

т.е. тангенциальная составляющая электрического вектора непрерывна на поверхности раздела сред.

И, наконец, рассмотрим поведение тангенциальной составляющей магнитного вектора. Анализ выполним аналогичным образом. При этом вместо выражения (4.99) получаем

$$\bar{H}_1 \cdot \bar{t}_1 \delta l_1 + \bar{H}_2 \cdot \bar{t}_2 \delta l_2 + \text{вклад от концов} = \frac{1}{c} \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \bar{\tau} \delta l \delta h + \frac{4\pi}{c} \bar{j} \bar{\tau} \delta l. \quad (4.102)$$

В результате предельного перехода при  $\delta h \rightarrow 0$  находим

$$\bar{n}_{12} \times (\bar{H}_2 - \bar{H}_1) = \frac{4\pi}{c} \bar{j}. \quad (4.103)$$

Итак, из полученных соотношений следует, что векторы напряжённости электрического и магнитного полей  $\bar{E}$  и  $\bar{H}$  и векторы электрической и магнитной индукции  $\bar{D}$  и  $\bar{B}$  удовлетворяют следующим граничным условиям:

1. Тангенциальные компоненты напряжённости электрического поля непрерывны ( $\bar{E}_{t_1} = \bar{E}_{t_2}$ ) на границе раздела двух сред, где физические свойства среды, характеризующиеся значениями  $\varepsilon$  и  $\mu$ , изменяются скачками.

2. Нормальные компоненты вектора электрической индукции непрерывны ( $\bar{D}_{n_1} = \bar{D}_{n_2}$ ) в отсутствие поверхностных зарядов на границе раздела сред.

3. Тангенциальные компоненты вектора напряжённости магнитного поля непрерывны ( $\bar{H}_{t_1} = \bar{H}_{t_2}$ ) в отсутствие поверхностных токов на границе раздела.

4. Нормальные компоненты вектора магнитной индукции непрерывны ( $\bar{B}_{n_1} = \bar{B}_{n_2}$ ).

Для оптических частот большинство сред практически немагнитно и поэтому  $\bar{B}$  равно  $\bar{H}$ . Применим соотношения, которым удовлетворяют векторы поля на поверхностях, где физические свойства среды претерпевают разрыв, к исследованию распространения плоской волны, падающей на плоскую границу, разделяющую две однородные изотропные среды.

## Законы отражения и преломления

Уравнение, определяющее напряжённость электрического поля  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  или индукцию магнитного поля  $\vec{B}(\vec{r}, t)$ , удобно представить в виде:

$$F(\vec{r}, t) = F_0 \exp(i\varphi) \exp[-i(\omega t - \vec{k}\vec{r})],$$

т.е. переменная часть фазового множителя в выражении, определяющем гармоническую электромагнитную плоскую волны, равна

$$\tau = \omega t - \vec{k}\vec{r} = \omega \left( t - \frac{\vec{r} \cdot \vec{s}}{V} \right),$$

где  $\vec{s}$  – единичный вектор направления распространения волны;  $V$  – скорость (фазовая) распространения волны.

Если на границу раздела двух однородных сред с разными оптическими свойствами падает плоская волна, то естественно предположить, что она разделится на две волны: проходящую во вторую среду и отражённую.